Disegno di Eleonora Funaro

1

Il caldo era insopportabile. Angelo se ne stava mezzo nudo, pesantemente stravaccato sul divano di finta pelle, ondeggiando qua e là su un cuscinetto di sudore. Clara rassettava il tavolone dopo il frugale pranzo, consistente in una scarsa porzione di penne, condite con formaggio avanzato, e scaloppine al Marsala. A dirla giusta si era usato il Vinsanto al posto del Marsala. Niente frutta: le ultime fragole erano state divorate giorni addietro. D'altronde, chi se la sentiva di mangiare con quella calura? Fortuna che le pareti del cascinale erano spesse mezzo metro, per cui dentro si godeva di una temperatura accettabile. Beatrice e Dario ammiravano dal finestrone la valle tremolante e sfocata. Non si capiva cosa dicessero ma erano senza dubbio le solite idiozie. Di sicuro prima delle cinque non sarebbero usciti. Meo, il gatto, sonnecchiava beatamente nel suo angolo preferito.

«E chiudete!», urla Angelo, mentre la sua schiena nuda, lubrificata dal sudore, scivola liberamente sui cuscini del divano. «Non sentite che zaffate calde che arrivano? Qui facciamo tutti uno stramazzone!»

Beatrice tira il tendone e lo stanzone cade nella penombra. Poi si stende a pancia in su sul pietrone del caminetto (non certo sul divano di plasticaccia color pelle, solo Angelo è così fesso!), e si immobilizza istantaneamente come un geco.

Dario cerca un precario equilibrio sulla sedia, con i piedi nudi puntati sul fresco ripiano di marmo del tavolaccio, sopra il quale giace ancora il settimanale che aveva letto in mattinata. Ad un tratto, inaspettatamente, partorisce una domanda: «Perugia è il centro dell'Umbria?»

Angelo, le cui palpebre stavano lentamente calando, ha un sussulto. Prendendo atto del silenzio generale, si fa carico di rispondere e con acume osserva, scandendo le parole: «Perugia è il capoluogo dell'Umbria.» Poi aggiunge: «Mannaggia a te! Stavo quasi per addormentarmi...»

«Ma no. Non intendevo questo», osserva Dario. «L'articolo che ho letto stamane, con argomentazioni di una superficialità sconcertante, esaltava Perugia in virtù della sua posizione rigorosamente centrale entro i confini della regione umbra. Allora mi sono chiesto: è mai possibile stabilire qual è l'esatto centro dell'Umbria?»

«E tu?», arguisce Angelo, sciabordando tra i cuscini. «Hai occupato due ore il bagno con quella rivista, solo per venirtene fuori con questa ca... »

«Aaangelooo!», ammonisce Clara, che in cuor suo invece apprezza il linguaggio sintetico e scurrile tipico di Angelo. «L'interrogativo è sensato, e può aprire la via ad elucubrazioni interessanti.»

«Ecco che cominci a fare la dottoressa!», le risponde Angelo, riprendendosi lentamente dalla sonnolenza.

Clara oltre che furba era anche *bona*, e Angelo in più occasioni ci aveva provato pure. Mai che ci avesse ricavato una benché minima soddisfazione. Quella aveva la testa dura!

Nel frattempo Beatrice, con i movimenti del bradipo e gli occhi spalancati, puntati sul soffitto a cassettoni, emette messaggi di insoddisfazione. Ma Dario insiste. Un bel testa dura anche lui! Si alza e recupera la cartina geografica. Non una di quelle rozze che danno gratis all'ufficio turistico, in parte coperte dalle fotografie dei monumenti. Quella bella, in perfetta scala, con segnati tutti i paesini di collina e le stradine tortuose che li congiungono.

«Ecco! Io sarei tentato di dire che il centro dell'Umbria sta qui», dice indicando un punto ad occhio e croce in prossimità di Gualdo Cattaneo, un borgo di poche migliaia di anime. «Non è certo Perugia questa!». Scorge Beatrice che ha mosso un braccio di qualche centimetro, e poi continua: «Non so perchè mi venga naturale di pensare che il centro sia all'incirca questo. Non ho fatto calcoli. E' più una sensazione.»

Beatrice non si muove più, si potrebbe pensare che neanche respiri. Sospesa nel tempo. Come quando nei fumetti di una volta veniva attivato il raggio pietrificante.

«Continua!», incalza invece Clara. Cosicché Dario prosegue: «Io ho questa abilità di individuare il centro e sono convinto che la abbiate anche voi. Sono anche convinto che voi mi indichereste più o meno lo stesso punto. Allora mi domando: ma che entità è il centro? Siamo tutti in grado di trovarlo. Ma, quando dobbiamo spiegare come abbiamo fatto, ci blocchiamo, mentre quella disgustosa rivista asserisce con sicurezza che il centro è Perugia, e ci imbastisce perfino un articolo sopra. Dai! Vediamo tutti che Perugia è più a nord.»

Clara gli toglie le parole di bocca. «Bene! Bene! E così vorresti trovare il modo esatto di definire il centro. E magari vorresti anche istruire un *robot* a riconoscerlo con certezza e mandarlo in giro nello spazio ad insegnare ad ipotetici alieni come si fa, per sondare se anche loro concordano sulle tue scelte. Beh! Non resta che servirsi di un modello matematico ... »

«Eccola!», esclama Angelo. «Lo sapevo! Ti aspettavo al varco. Non vedevi l'ora di ribadire a tutti noi che sei laureata in matematica con mille e lode. Tutte le volte la stessa manfrina! Si parte da un discorso di tutt'altra natura, di geografia, e tu ci piazzi dentro la matematica. Bisognerebbe che ti strizzassi il cervello per vedere cosa ne salta fuori! Chissa che sorprese!» Angelo usava spesso questi toni irriverenti nei confronti di Clara. Ma, alla fine dei conti, avrebbe voluto volentieri strizzare ben altro del corpo di lei.

Un lamento breve, composto di poche note non ben articolate, proviene ora dal caminetto: «eodinaaateee.» Vista la disattenzione del pubblico il messaggio sonoro si ripete ben altre due volte con pari tonalità.

«Credo che Beatrice cerchi di comunicare», osserva Dario avvicinandosi a lei con misurata cautela; è capitato più volte che Beatrice "esplodesse" ingiustificatamente.

«Non fatemi parlare ad alta voce, che con questa afa mi costa fatica», farfuglia lei. «Dovete leggere le coordinate.»

«Ma le coordinate di che?», protesta Angelo. «A te invece il cervello ha preso acqua, con questa umidità! Ma proprio a me doveva capitare una siffatta combriccola: uno che elabora teorie seduto sulla tazza del gabinetto, una che pontifica e invoca modelli matematici, l'altra affetta da gravi turbe psichiche. Se non fosse che fuori ci sono almeno 35 gradi me ne sarei già andato al lago.»

«Le coordinate geografiche», dice Beatrice sollevandosi appena, puntando i gomiti sul granito. «Longitudine. Latitudine. Sono riportate ai lati della carta. Questo maledetto punto che cerchi avrà le sue coordinate. Basta trovarle.»

«E in che maniera?», domanda Dario.

«Vedi quanto si estende l'Umbria da est a ovest, da nord a sud. Poi prendi il punto di mezzo», risponde Beatrice riadagiandosi lentamente.

«Giusto!» Dario si illumina. Schizza a prendere carta e matita da un vecchio mobile in noce tarlato e si avventa sulla cartina. «Dunque. Cominciamo da ovest. Ecco qua! Dalle parti di Fabro. Il punto più ad ovest dell'Umbria ha longitudine $11^o\ 54'$. Quello più ad est è nei pressi del Monte Vettorello, a Forca di Presta, e ha longitudine $13^o\ 16'$.» Lavora con ardore e precisione. «Passiamo a nord. Eccoci! Il Passo di Bocca Trabaria, e questa volta leggiamo la latitudine: $43^o\ 38'$. E poi c'è sud. Pressapoco a Magliano Sabina e la latitudine è $42^o\ 22'$.» Ha scritto tutti i dati nero su bianco. «E ora quattro operazioni. La longitudine me la ricavo trovando il valore di mezzo tra quelli di est ed ovest. Si fa la somma diviso due e viene $12^o\ 35'$. Lo stesso faccio per sud e nord. Ci sono! Le coordinate del centro sono: longitudine $12^o\ 35'$, latitudine $43^o\ 00'$.» Con un sorriso fra le labbra va a controllare la corrispondenza sulla pianta. «Viene nei pressi di Cannara, un po' più a nord di quanto pensassi, ma a una ventina di chilometri da Perugia. E brava Beatrice!»

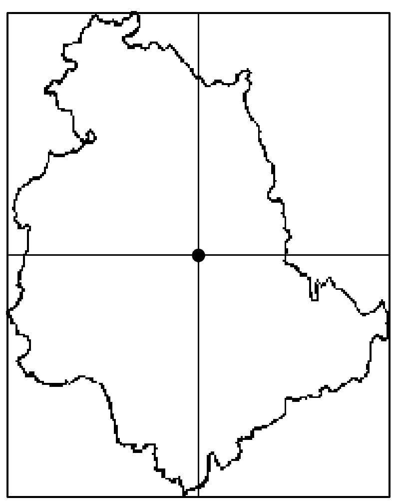
«E bravi polli!», esclama Clara che se ne stava zitta in un angolo a spremere limoni e a ridacchiare sotto i baffi. In effetti, una leggera peluria l'aveva; roba di poco conto.

«Perchè? Cos'hai da criticare. Questa volta siamo arrivati prima noi alla soluzione», dice Dario.

«Sono spiacente per voi, ma il procedimento adottato è alquanto discutibile. Quel che è peggio è che ora mi tocca anche cercare di convincervi che avete sbagliato tutto», ribadisce Clara.

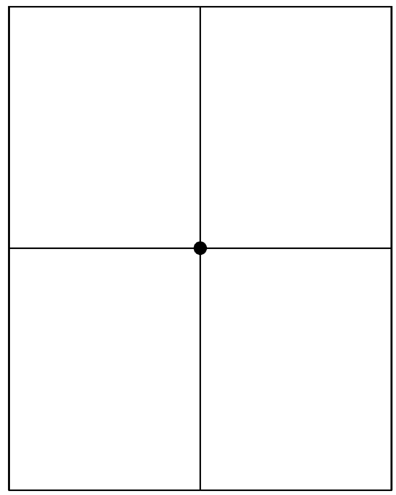
Quando Clara prende queste posizioni di sfida decisa, Angelo a fatica riesce a nascondere la stima che ha per lei. Peccato che questa sua segreta ammirazione per Clara non trovi appagamento. Come reazione, l'unica cosa che gli riesce di dire è: «Sentila là, la baronessa! Da che pulpito! Incassa e statti quieta! E adesso fammi rilassare in pace, che ho la digestione in atto.»

Ma, figuriamoci, ormai Clara è lanciata! Si impadronisce della matita e scrive come una forsennata. «Quello che avete fatto», spiega, «è di inscatolare l'Umbria in un rettangolo. Ad essere rigorosi non è esattamente un rettangolo visto che i meridiani terrestri non sono fra loro paralleli; ma tralasciamo questo dettaglio. Poi vi siete trovati il centro del rettangolo, così:»

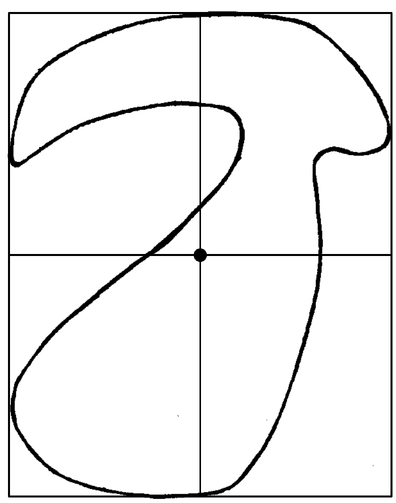


«Embè!», incalza Dario allungando il collo e facendo gesti con la mano del tipo *macchestaiaddì*.

«Il centro del rettangolo, è il centro del rettangolo. Ha poco a che spartire con l'Umbria», continua Clara. «Anzi, l'Umbria la posso anche togliere.»



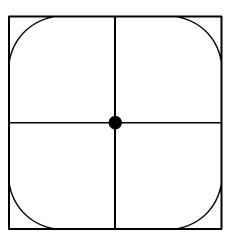
«E al suo posto posso metterci un fungo.»

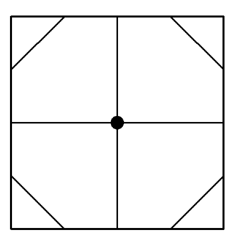


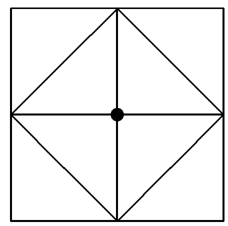
Lo sapevano tutti che Clara era piuttosto negata per il disegno. A riprova, quel fungo era venuto un'emerita schifezza. Sembrava più una roncola. «Il centro di una figura», continua lei, «dovrebbe essere più caratterizzato dalla forma di quest'ultima, mentre io dentro al rettangolo ci posso disegnare quello che mi pare. Basta che una figura lambisca i quattro lati del rettangolo, ed il suo centro, così come lo avete proposto, sarà invariabilmente quello del rettangolo stesso.» Clara insiste sul concetto, portando ad esempio ulteriori elaborati grafici, tutti di pessimo valore artistico.

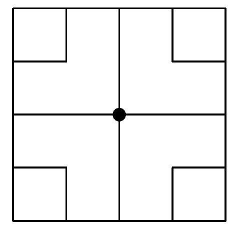
«E allora? Cosa dovremmo fare?», dice Dario, che comincia ad avere qualche dubbio sul proprio operato.

Clara inizia la lezione. «Bisogna capire dove sta l'errore e cercare di rimediare. Ma, prima di tutto, bisogna semplificare. La figura di cui ti sei proposto di cercare il centro, cioè la sagoma dell'Umbria, è troppo complicata. Il buon matematico è quello che cerca di facilitarsi la vita il più possibile. Occorre venire al nocciolo del problema senza scomodarsi più di tanto. Partiamo da figure semplicissime, per le quali il tuo modo di valutare il centro è scontato che funzioni. Ad esempio queste:»

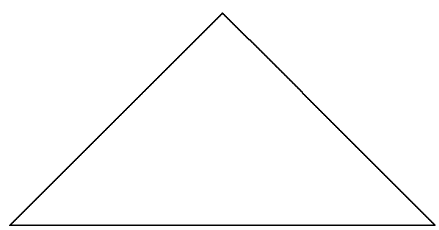




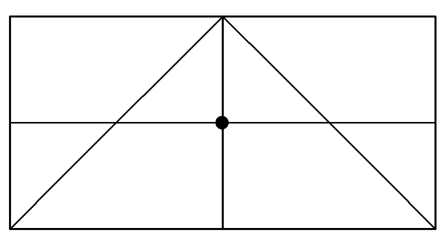




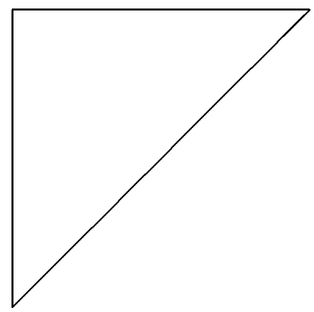
«Esse esibiscono tutte un'ottima simmetria rispetto al punto centrale. Vediamo come te la cavi ora con questo triangolo», dice Clara con aria di sfida porgendo la matita a Dario.



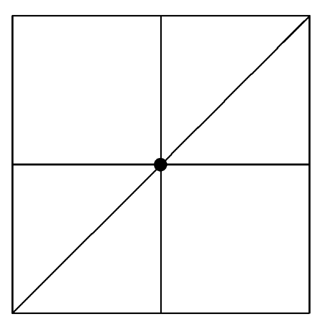
Mentre Beatrice lascia la sua postazione e raggiunge il tavolo della contesa, Dario mette in atto il suo procedimento.



«E vediamo che succede con questo», propone Clara.



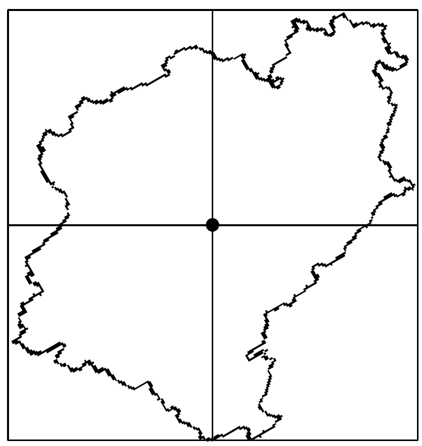
«Uuh! E' lo stesso di prima», osserva Beatrice, «stai solo menando il can per l'aia.» Ma Dario ha già capito. Con una malcelata rassegnazione porta a termine la sua costruzione.



«E dunque?», chiede Beatrice a Dario, vedendolo assai deluso.

«Dunque, andiamo male!», arguisce Dario. «Lo stesso triangolo pare avere due centri. Per di più, uno se ne sta pure sul bordo. Che razza di centro è!»

«Proprio così», interviene Clara, «a seconda di come ruoti il triangolo, la tua costruzione porta a far cadere il centro in posti diversi. Non è una buona definizione di centro. Pensa. E' come se io tenessi il foglio qui fermo e tu facessi un giro intorno al tavolo: vedresti il tuo centro spostarsi qua è là. Al famoso alieno a cui vorremmo spiegare come calcolarlo, non dovremmo solo recapitargli la figura, ma anche dirgli da che parte si guarda. Piuttosto antipatica come situazione. E lo stesso accade per l'Umbria. La giriamo un po', e scopriamo che il centro non è più quello che avevi pensato che fosse prima.»



«Il calcolo del centro deve potersi fare indipendentemente dalle coordinate», continua Clara, «sono loro che inducono ad errori, fornendo una direzione di osservazione privilegiata.»

Dario si irrigidisce, si gira di 180 gradi come un soldatino e si incammina verso le camere, uscendo in perfetto silenzio dalla porta.

E' il momento di Angelo. «E ora dov'è andato quello? Non si sarà mica ficcato in bagno? Comunque vada, sempre là finisce, e invece di scaricarsi si ricarica. Vedrete che prima di sera sortirà con qualche altro diabolico quesito. Come due giorni fa, con quella assurda storia della teleferica. Vi ricordate? Che angoscia! E voi dietro, a dargli corda. Ho il timore che questi episodi diventino sempre più frequenti. Ma io vi mollo! La prossima estate le vacanze me le faccio ai Caraibi e in Italia centrale ci verrete voi soli.»

«Sì, la questione della teleferica», riprende Beatrice, «com'era? Non ricordo più. Il signor Alberto andava tutti i giorni in bicicletta a lavorare dal suo paese al porto. Partiva alle 7 del mattino per cominciare in punto alle 8. A fianco della strada correva la teleferica che portava i vagoncini col carbone alle navi. Ad ogni minuto esatto, al paese, ne veniva caricato uno. Durante il viaggio, il signor Alberto veniva sorpassato da questi contenitori e li contava. Ed ora non rammento ... »

Interviene allora Clara. «Il signor Alberto, che non portava l'orologio, si stupiva ogni volta di contare 54 vagoncini durante il percorso. Eppure, pur partendo alle 7, arrivava giusto in tempo per prendere servizio al porto. Là poteva costatare personalmente, facendosi prestare l'orologio dai colleghi, che il carico di carbone arrivava rigorosamente ogni minuto. La situazione era paradossale. Dove finivano allora i 6 minuti che si perdeva il signor Alberto ogni mattina?»

«Uuh! Ora mi viene in mente», continua Beatrice. «I sei minuti corrispondevano ad altrettanti carichi partiti dal paese, ma ancora in viaggio quando il signor Alberto arrivava al porto. Tra un carico e il successivo, che il signor Alberto vedeva passare nel suo tragitto, intercorreva più di un minuto, visto che la bicicletta nel frattempo aveva fatto un po' di strada in avanti. Quindi, l'opinione che 54 vagoncini corrispondessero a 54 minuti era sbagliata. Sommando le piccole frazioni di ritardo tra il passaggio di un carico e l'altro, rispuntavano fuori proprio i 6 minuti mancanti.»

«Non me ne può fregare di meno delle avventure del signor Alberto; che si compri un orologio una volta per tutte!», conclude Angelo.

«Questa osservazione idiota l'avevi già fatta la scorsa volta. E come vedo non hai imparato nulla», lo redarguisce Clara.

«Ma sì dai! Che poi la morale l'avevo capita», le risponde Angelo. «Il concetto di minuto è opinabile. Fintantoché si sta fermi vale un minuto, ma per il solo fatto di essere in movimento, il suo valore può cambiare, tanto da mettere in crisi la nozione di tempo. Un po' come il vostro centro, che, a seconda dell'angolazione con cui lo si guarda, muta a piacer suo. Ciò non toglie nulla al fatto che l'anno prossimo me ne andrò a Trinidad. E non provate a venirmi dietro.»

«Credi che lì farà meno caldo?», provocano in coro le due befane.

«No, ma è opinione diffusa che si *cucchi* un *casino.*» Con questa logora, ma ancor mitica frase, Dario scivola a pancia in giù sul divano unto.

2

La stanza era da poco ripiombata nel silenzio, quando rientra Dario domandando: «E ora che si fa?»

«E' ancora presto per fare un giro», gli risponde Beatrice, che sta cercando il ferro da stiro. Il ferro da stiro! Con il caldo che fa! Ci ripensa e apre il frigo per recuperare un po' di ghiaccio per la limonata.

«No, ora cosa si fa con la storia del centro dell'Umbria? Ma sarà vero che non si può calcolare?», dice Dario con preoccupazione e, francamente, non si capisce perchè se la prenda così tanto.

«Vai! Beviti un bicchiere di limonata», gli propone Angelo, «chissà che ti aiuti ad andare di meno in quel gabinetto, da dove trai le tue ispirazioni.»

Tocca a Clara-testa-dura a parlare. «Nessuno ha detto che non si possa calcolare. E' il modo con il quale avete affrontato il problema che è deludente. Occorre tentare altre strade. Che ne dici di cercare il baricentro?»

Dario mette in azione i suoi neuroni. Un anno come studente al Politecnico, prima di cominciare a vendere utensili di precisione via *internet*, ha dato i suoi frutti. «Il baricentro ha a che fare con la fisica, ... le forze peso, ... l'equilibrio. Effettivamente anch'esso occupa una posizione centrale. Non capisco tuttavia come la situazione possa migliorare.»

«Il motivo lo hai detto prima», risponde Clara, «il baricentro ha a che fare con l'equilibrio. Prendi un oggetto molto piatto; una piastra sottile del materiale che preferisci e della forma che più ti aggrada. Tienila appesa mediante una cordicella in modo che stia perfettamente orizzontale, cioè in modo da far passare, per l'appunto, la corda attraverso il baricentro. L'equilibrio sarà in genere piuttosto stabile. Comunque cerchi di alterarlo, dando dei leggeri colpetti alla piastra, questa tenderà a ritornare nella posizione originale, sia che tu la faccia dondolare insieme alla corda, sia che tu la faccia oscillare cercando di mantenere la corda ferma in direzione verticale. Ma l'aspetto che ti può maggiormente interessare è che puoi torcere la corda e far ruotare lentamente la piastra sempre mantenendola in equilibrio orizzontale. Interessante no?»

Dario comincia ad agitarsi in modo scoordinato. Grattandosi il mento passeggia avanti e indietro bofonchiando.

«Uuh! Ma cosa fai?», gli chiede Beatrice ridendo.

«Non capisci?», ribatte Dario senza smettere di muoversi. «Incolliamo la pianta dell'Umbria su un grosso cartone e la ritagliamo lungo i confini. Poi la appendiamo con un cordone al lampadario in modo che si mantenga orizzontale in perfetto equilibrio. Il punto di attacco dovrà essere per forza il baricentro.»

«Sì, ma adesso calmati», protesta Beatrice, «cosa te ne farai mai del baricentro?»

Dario si gonfia come un pesce palla. «Il baricentro è il centro che cercavamo. Una volta che ho trovato la posizione di equilibrio potrò torcere la corda e ruotare l'oggetto in sospensione. L'equilibrio persisterà. Ciò, in altre parole, significa che, da qualsiasi parte tu guardi l'oggetto appeso, il suo baricentro non cambia, a differenza di quello che avveniva con la definizione che avevamo dato in precedenza. E' proprio quello che volevamo. Al lavoro!»

«Al lavoro un bel niente!», ulula Angelo. «Volete disfare la casa? Chi lo sente poi il padrone? Già è un tipo apprensivo. Per quell'impronta di scarpone sul muro con zanzara spiaccicata, una mutante di Chernobyl viste le dimensioni, lo scorso anno quasi non voleva restituirci la caparra.»

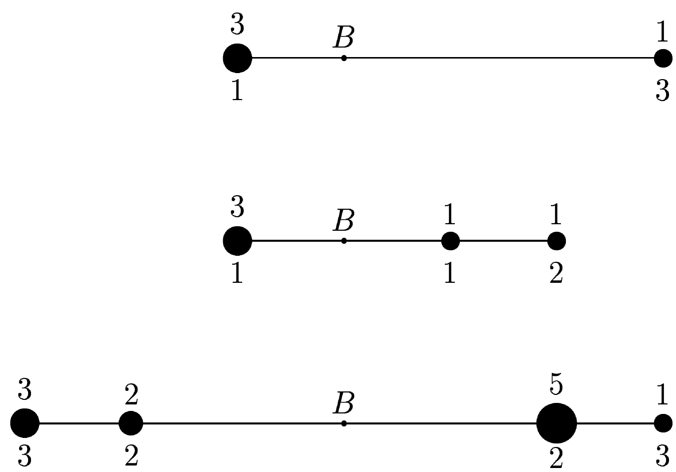
Interviene Clara. «Mi costa, ma devo ammettere che ha ragione Angelo. Bando agli esperimenti inutili. Cerchiamo di ridurre al minimo le nostre fatiche, specialmente con queste temperature. Prima di tutto, che ne è del proposito di confrontare con gli alieni le proprie cognizioni? Se questi si trovassero in una nave spaziale in completa assenza di gravità, sarebbe ben difficile per loro riprodurre il tuo esperimento, dato che non ha senso appendere qualcosa in mancanza del peso.

E poi non si realizza un progetto senza averlo studiato prima accuratamente. Immagina che sia qualcosa di grandioso ed eccezionalmente costoso; il ponte sullo stretto di Messina ad esempio. Non si può mica fare uno schizzo veloce a matita, e far arrivare subito dopo ruspe e betoniere per iniziare i lavori. Senza una pianificazione adeguata, al giorno d'oggi non si riescono più a compiere grosse conquiste. Abbiamo macchine a disposizione che possono "simulare" con ottima fedeltà gran parte degli fenomeni che la tecnologia o la natura stessa ci propongono, senza che si debba avvitare un solo bullone. Occorre far parlare il linguaggio della matematica. Solo quando tutto sarà perfettamente calibrato e saremo sicuri che non possano intervenire sorprese, nei limiti della nostra conoscenza ed esperienza, si potrà dare il via ad operai e capomastri. Per imprese di un certo tenore, la fase di progettazione potrebbe essere assai più lunga di quella pratica. Un razzo decolla e in pochi minuti è fuori dall'atmosfera terrestre. Per questo breve avvenimento occorrono anni di duro lavoro da parte di numerosi esperti. Sicuramenti i primi lanci pionieristici sono serviti ad acquisire un'esperienza notevole nel settore e a stabilire le regole di base. Più in là si è potuti andare solo con modelli teorici, scritti con oculatezza a tavolino e sperimentati mediante veloci macchine calcolatrici.

E' bene inteso che, ogni tanto, bisogna cercare conferme ai risultati teorici con qualche esperienza pratica mirata, dai costi e dai rischi notevolmente inferiori a quelli relativi al prodotto finale. Per quanto esistano sempre degli imprevisti è bene cercare di ridurli al minimo, specialmente se sono coinvolte delle vite umane. Alla fine, un po' di coraggio e spirito di avventura non guastano, ma non possono rappresentare la parte saliente di un grande progetto scientifico.»

Durante il monologo di Clara nella stanza regna il più totale silenzio. Angelo non manca di romperlo dicendo: «Questa sera andiamo alla sagra del cinghiale? Ultimamente, vista la cronica assenza di pecunia, le cene sono state un po', diciamo, "teoriche". Sento l'esigenza di apportare qualche ritocchino "pratico" ai miei parametri di colesterolo ... » L'infelice battuta non è comunque sufficiente a distogliere, anche di poco, l'attenzione degli altri due nei confronti di Clara.

Quest'ultima, pertanto, prosegue indifferente alle sollecitazioni esterne. «A questo punto vi starete domandando come si passa dall'idea astratta alla fase attuativa. Come vi avevo già detto prima, è conveniente analizzare preliminarmente dei casi semplici. E' prassi fare delle indagini iniziali riguardanti lo stato di equilibrio di un'asta rigida sottile, alla quale abbiamo collegato dei pesi, ad esempio, delle biglie metalliche. Vedete! Queste sono tre situazioni di equilibrio», spiega Clara disegnando allo stesso tempo.



«Con B indico il baricentro», prosegue Clara. «Il numero sopra ciascuna biglia indica il suo peso in chilogrammi, libbre, once, o l'unità di misura che vi pare. Invece, il numero sotto indica la distanza dal centro di ciascuna biglia al baricentro, che potete misurare in centimetri, pollici, o quello che più vi aggrada. Possiamo ricavare una regola empirica che è alla base del modello matematico. Di ciascuna biglia valutiamo il prodotto del suo peso per la sua distanza dal baricentro, cioè il prodotto del numero che sta sopra per quello che sta sotto. Questo prodotto viene chiamato *momento*. Nel primo disegno il momento della prima biglia è $3 \cdot 1 = 3$ e quello della seconda biglia è pure $1 \cdot 3 = 3$. La prima pesa di più ma dista meno dal baricentro, la seconda pesa meno ma dista di più.

Una proprietà generale, che potete confermare con tutti gli esperimenti che volete, dice allora che la somma dei momenti delle biglie che stanno a sinistra del baricentro deve uguagliare la somma dei momenti di quelle che stanno a destra.» Clara esegue la riprova a fianco di ogni figura e scrive:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 &= 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 &= 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{aligned}$$

Poi riprende. «La legge che vi sto fornendo è di tipo fisico, cioè è una proprietà dedotta attraverso innumerevoli esperimenti, che non ha trovato finora motivi di essere contraddetta. La corrispondente definizione enunciata in modo matematico suona così: il baricentro è quel punto sull'asta per il quale la somma dei momenti delle biglie di destra è uguale alla somma dei momenti delle biglie di sinistra. Se indicate un punto che non soddisfa tale definizione vuol dire che esso non è il baricentro. Per essere corretti, bisogna ipotizzare che le biglie abbiano, a differenza di come appare dai miei disegni, delle dimensioni trascurabili rispetto alle loro reciproche distanze. Il loro peso dovrebbe essere tutto concentrato nel loro punto di mezzo, anche se questa è una condizione irrealizzabile in pratica. Per questo, spesso, si parla di "astrazione matematica", quella stessa che ci permette di immaginare un punto geometrico senza dimensione, anche se il concetto non trova un vero riscontro nel mondo materiale.»

Dario concorda. Nonostante ciò non è ancora appagato. «Ci risiamo daccapo. Tu ci hai dato una definizione e hai fornito tre esempi di situazioni di equilibrio, verificando che quello che hai indicato con B è effettivamente il baricentro. Ma se io non lo conoscessi, come farei a trovare B? Immagina che io ti dia cento biglie, tutte di peso diverso e sparpagliate qua e là sull'asta. Che faresti?»

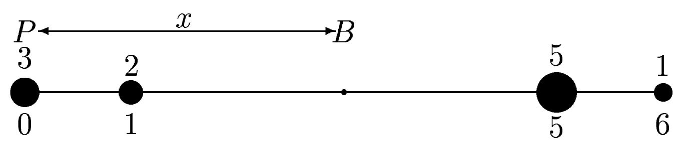
«Domanda molto pertinente», osserva Clara. «Per rispondere devi permettermi di fare qualche conticino elementare; non più di quanto non si impari alle scuole medie inferiori.»

La frase stimola Angelo ad aprire bocca. «Io alle medie giocavo tutto il pomeriggio a pallone, mi ingozzavo di gelati e in matematica ero scarsissimo.»

«Non lo dubitavo affatto», rispondono simultaneamente Clara e Beatrice con la faccia da secchioncelle, quasi si fossero accordate segretamente in anticipo. Certo che Clara potrebbe anche conciarsi meglio. Basterebbe un po' di trucco e sarebbe subito più attraente. Angelo non aveva mancato di farglielo notare in più occasioni, ma, evidentemente, le sue prediche sono finite nel nulla.

«Dai, vai avanti, spiegaci come si fa», incalza Dario.

Clara dunque riprende. «Consideriamo la figura con quattro biglie. Scelgo a piacere un punto P sull'asta, ad esempio lo prendo in corrispondenza del centro della prima biglia. In relazione a ciascuna biglia mi scrivo sopra il suo peso, ma, sotto, questa volta, prendo appunto della sua distanza da P.



Vediamo poi quale deve essere la posizione di B rispetto a P. E' chiaro che B sta a destra di P, ma vogliamo anche valutare la sua distanza esatta da P, che, con una notazione tipica dei matematici, sarà la nostra incognita x. Il momento della prima biglia è $3 \cdot x$, essendo il peso della biglia moltiplicato per la sua distanza da B, che è appunto x. Il momento della seconda biglia è $2 \cdot (x - 1)$, che è il peso della biglia moltiplicato per la sua distanza dal baricentro. Tale distanza vale $x - 1$ in quanto codesta biglia è più vicina al baricentro di una quantità pari a 1. Tocca ora alla terza biglia. Ad occhio e croce sappiamo che B sta a sinistra di essa, per cui il momento viene ad essere $5 \cdot (5 - x)$ che è, come sempre, il prodotto tra il peso della biglia e la distanza di essa da B. Quest'ultima l'ho calcolata come la distanza della biglia da P, che è 5, meno la distanza di B da P, che è x. Come dire che la distanza tra Milano e Bologna corrisponde alla distanza Milano-Roma meno quella Bologna-Roma ... »

Angelo non può sottrarsi dal fare un intervento: «Per fortuna che i matematici sono quelli dalla vita facile! Per andare da Milano a Cologno Monzese passerebbero per Pechino pur di non ammettere che ci si arriva prima in metropolitana.» La sortita viene totalmente ignorata. Il cervello di Angelo reagisce inviandogli immagini di se stesso ai Caraibi, nell'atto di sgranocchiare cocco all'ombra di una palma, in buona compagnia.

Clara riprende ad istruire il volgo. «In maniera simile si ricava il momento della quarta biglia che corrisponde a $1 \cdot (6 - x)$. Abbiamo gli ingredienti per svolgere il conto finale. La somma dei momenti di destra è uguale alla somma dei momenti di sinistra. Pertanto, ciò equivale a scrivere che ...

$$3 \cdot (x - 0) \; + \; 2 \cdot (x - 1) \quad = \quad 5 \cdot (5 - x) \; + \; 1 \cdot (6 - x)$$

Ho messo $3 \cdot (x - 0)$ al posto di $3 \cdot x$ perchè ciò non cambia il risultato, ma rende più elegante quello che sto per dirvi.» Quindi prosegue a scrivere:

$$3 \cdot x \, - \, 3 \cdot 0 \, + \, 2 \cdot x \, - \, 2 \cdot 1 \quad = \quad 5 \cdot 5 \, - \, 5 \cdot x \, + \, 1 \cdot 6 \, - \, 1 \cdot x$$

«Qui ho svolto i prodotti esattamente come si studia alle scuole medie. In altre parole, il prodotto di *tot* per la differenza di due numeri è pari alla differenza fra *tot* moltiplicato per il primo numero e *tot* moltiplicato per il secondo. Porto alcuni termini da sinistra a destra del simbolo uguale e viceversa, in modo che x appaia solo da una parte ...

$$3 \cdot x \, + \, 2 \cdot x \, + \, 5 \cdot x \, + \, 1 \cdot x \quad = \quad 3 \cdot 0 \, + \, 2 \cdot 1 \, + \, 5 \cdot 5 \, + \, 1 \cdot 6$$

Naturalmente ho cambiato il segno meno in più a quei termini che sono stati spostati. Raccolgo infine x ...

$$(3 + 2 + 5 + 1) \cdot x \;=\; 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 6$$

e ricavo x dividendo entrambi i membi per la quantità $(3 + 2 + 5 + 1)$, cioè ...

$$x = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{3 + 2 + 5 + 1} = \frac{33}{11} = 3$$

Dunque la distanza di B da P vale 3. Non è difficile realizzare che è proprio la quantità giusta. Alcune operazioni sui numeri si sarebbero potute svolgere fin da subito, onde accorciare i calcoli. Tuttavia, l'espressione di x che vi ho fornito, oltre a risolvere il problema nel caso specifico, è molto importante per trattare tutti i casi analoghi. Se notate, mi sono trovata alla fine con una frazione. Al numeratore c'è una somma, dove gli addendi sono il prodotto del peso di ciascuna biglia per la sua distanza da P. Al denominatore c'è invece la somma dei pesi delle biglie. Tutte quantità note, una volta fissato il punto P. Questa è la regola generale che cercavamo. Qualunque sia il numero delle biglie ed il loro peso, la distanza di B da P si ottiene sempre allo stesso modo: somma del prodotto dei pesi per la loro distanza da P, diviso la somma dei pesi. Ci tengo ad osservare che questo non è un risultato empirico; esso è un teorema, che si può dimostrare rigorosamente con logica a partire dalla definizione di baricentro che vi ho fornito in precedenza, indipendentemente dalla distribuzione delle biglie. Un altro teorema è quello che dice che la posizione di B non dipende da come è stato scelto P; questa prendetela solo come curiosità e non approfondiamo oltre l'argomento.»

Angelo stende le mani sulla faccia mugolando: «Che noia! Che strazio!» Nel contempo, i suoi neuroni, attraverso sofisticati fenomeni elletrochimici, riproducono immagini mentali di se stesso, più elegante che mai, sorseggiante un *Margarita* in un locale notturno di Aruba, attorniato da ammalianti presenze.

«Perchè non vai a comprarti un gelato? Così ci lasci un po' in pace», dice Beatrice.

«Neee! Il bar oggi è chiuso e il negozio all'angolo apre più tardi», risponde Angelo, che non ha alcuna intenzione di lasciare il divano per due validi motivi: uno, che è estremamente pigro; due, che, malgrado le apparenze, non vuole perdersi neanche una parola della discussione in atto.

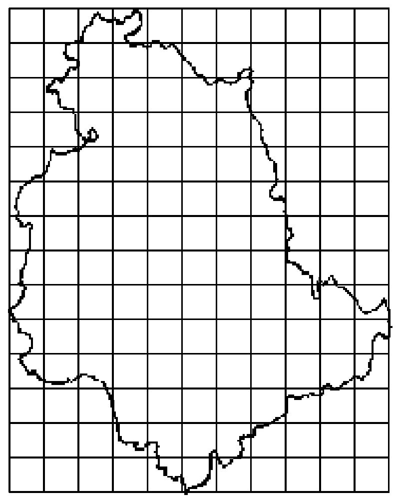
3

Dario riprende il filo del discorso. «Tutto quello che hai detto è interessante. Finchè si tratta di giocare con un'asta e qualche biglia non ho difficoltà a seguirti. Siamo tuttavia ancora lontani dal problema, che è quello di trovare il baricentro dell'Umbria.»

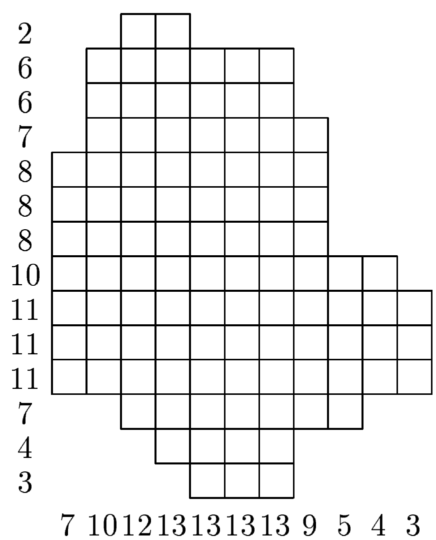
«Non così lontani come pensi», risponde Clara. «Il baricentro di una figura bidimensionale è in qualche modo legato all'individuazione della posizione di equilibrio di due aste, una orientata in direzione ovest-est, e l'altra in direzione sud-nord. Ti mostrerò subito come. Riesci a dirmi intanto qual'è l'ingombro dell'Umbria nelle due direzioni?»

«Dunque. Sono circa 112 chilometri da ovest a est, e circa 142 chilometri da sud a nord», comunica Dario, dopo aver preso accurate misure sulla cartina geografica.

«Bene! Allora possiamo dividere il rettangolo contenente l'Umbria in quadrettoni di circa 10 chilometri di lato. Ne vengono fuori 154», dice Clara mentre disegna.

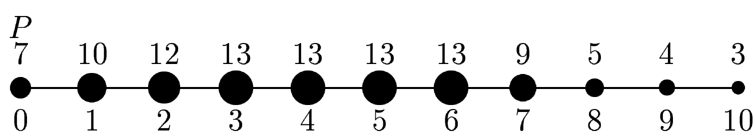


«Possiamo successivamente escludere quei quadrati che non hanno alcun punto in contatto con l'Umbria ...



ottenendo così un'altra figura geometrica che potremmo chiamare *versione squadrata* dell'Umbria.

Ho anche riportato a fianco ed in basso, il numero di quadrati che compongono rispettivamente ciascuna riga e ciascuna colonna, tra quelli rimasti. Per determinare il baricentro ho bisogno ora di calcolare due quantità, la prima che mi consenta di individuare la sua posizione lungo la direzione ovest-est. Similmente, cercherò di posizionare il baricentro lungo la direzione sud-nord. Cominciamo con il primo caso. Prendo la solita asta e, a distanza uniforme, attacco delle biglie il cui peso è pari al numero di quadrati per ogni colonna ...

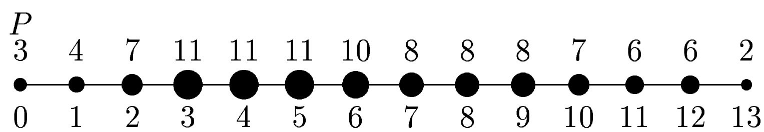


L'idea è quella di trovare la posizione di equilibrio dell'Umbria, lungo la direzione est-ovest, cercando il baricentro dell'asta, cosa che ormai sappiamo fare. La distanza di questo baricentro dal punto P, posto al centro della prima biglia, misura:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 7 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + 13 \cdot 5 + \\ +13 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 10 \end{pmatrix}}{7 + 10 + 12 + 13 + 13 + 13 + 13 + 9 + 5 + 4 + 3} =$$

$$= \frac{439}{102} = 4,3039215...$$

Come vi avevo spiegato precedentemente, mi è bastato fare la somma dei prodotti dei pesi delle biglie moltiplicati per le loro distanze da P. Il tutto è stato diviso per la somma dei pesi, somma che è pari a 102, cioè al numero di quadrati componenti la versione squadrata dell'Umbria. Lo stesso ragionamento può essere reso valido per quanto riguarda la direzione sud-nord. Mi costruisco, cioè, un'opportuna asta con biglie ...

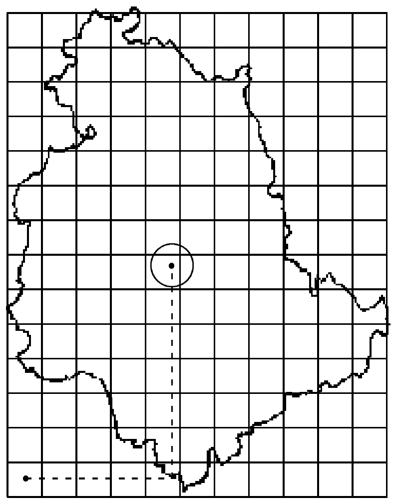


Ne ricavo il suo baricentro con la consueta divisione:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 3\cdot 0+4\cdot 1+7\cdot 2+11\cdot 3+11\cdot 4+ \\ +11\cdot 5+10\cdot 6+8\cdot 7+8\cdot 8+8\cdot 9+ \\ +7\cdot 10+6\cdot 11+6\cdot 12+2\cdot 13 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3+4+7+11+11+11+ \\ +10+8+8+8+7+6+6+2 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{636}{102} = 6,2352941...$$

Ritornando al rettangolo diviso in 154 quadrati, mi posiziono al centro del primo quadrato in basso a sinistra e mi sposto di poco più di 4 quadrati verso destra e poco più di 6 quadrati verso l'alto. Riesco a dedurre in questo modo che il baricentro dell'Umbria deve stare all'incirca in questo circoletto ... »



«Siete soddisfatti ora?», chiede Clara dal podio rivolgendosi al pubblico esterrefatto.

«Sì e no», risponde Dario. «Il ragionamento fila, ma credo che ci siano stati alcuni imbrogli. La forma dell'Umbria entra effettivamente in gioco nella costruzione del tuo baricentro. Ma, chi ti ha detto di usare dei quadrettoni così grossi? E' vero che ne hai buttati via molti, ma ti sei tenuta anche alcuni di loro che contenevano pezzi di territorio non appartenente all'Umbria.»

«Vero! Verissimo!», esclama Clara. «C'è stato anche un altro piccolo imbroglio: quando ho sostituito i quadrati con le biglie, non sono poi esattamente la stessa cosa. In effetti questa tecnica che vi ho testé esposto non permette di individuare esattamente il baricentro dell'Umbria. Tuttavia, consente di determinarlo con un margine di errore non molto grande. Potrei infatti essermi sbagliata di quattro o cinque chilometri. Dovete riconoscere che non ho segnato un puntino ma un circoletto, all'interno del quale mi aspetto che, con un pizzico di incertezza, stia il baricentro cercato.»

«Ma è ridicolo! La matematica è precisione. Esige cifre con tutti i decimali esatti. Mi hai fatto perdere tutto questo tempo e siamo ancora al punto di prima.» Dario si sta infuriando. Beatrice lo guarda senza sapere che pesci pigliare, mentre Angelo si è addormentato e russa beatamente.

Clara riprende il discorso. «E' giusto, la matematica richiede alta precisione. Però la questione delle cifre con tutti i decimali al loro posto ha più a che fare con il bilancio di un'azienda. Ci possono essere numeri che non possono essere scritti, malgrado si sappia esattamente come sono definiti. Ad esempio, la radice quadrata di due, cioè quel numero che moltiplicato per se stesso dà per risultato appunto due. In prima approssimazione tale numero vale 1.414213..., ma non puoi pretendere di poterlo scrivere per intero, visto che ha infinite cifre decimali che si avvicendano senza una regola ben definita. Non è un numero periodico come, per esempio, 180 diviso 55, che equivale a 0,3272727272727..., dove 27 si ripete indefinitamente. La radice di due non può infatti essere scritta come una frazione; in altre parole, non è il risultato della divisione di due numeri. Ci sono altri numeri, non rappresentabili come frazioni, per i quali si intuisce una distribuzione logica nella sequenza dei loro decimali. Uno di questi è:

$$1,010010001000010000010000001...$$

Pare però che non esista alcun modo per esprimere la radice di due con l'uso delle classiche cifre, se non mediante il simbolo $\sqrt{2}$, essendo impossibile riportare su uno, dieci, centomila fogli di carta la sua rappresentazione decimale, anche scrivendo piccolo piccolo.

Vedi dunque che si può essere ben precisi nell'identificare una certa quantità senza tuttavia essere in grado di scriverla. Tempo fa, alle scuole medie, veniva insegnato un metodo, che gli studenti digerivano malvolentieri, per calcolare una dopo l'altra le cifre della radice quadrata di un numero. Ovviamente, occorrerebbe un tempo infinito per portare a termine il conto, ma di volta in volta si può aggiungere una nuova informazione ed avvicinarsi così al valore esatto di $\sqrt{2}$. Si comincia con 1,4. Poi lo si perfeziona come 1,41. Poi ancora si prosegue: 1,414 - 1,4142 - 1,41421 - 1,414213 e via di seguito. Questo è un procedimento rigorosamente accettato per il calcolo di $\sqrt{2}$. Non si arriverà mai in fondo, ma si può rendere il margine di errore piccolo quanto si vuole, se ci si sforza di andare avanti con i conti.

Le stesse argomentazioni valgono per il baricentro dell'Umbria, le cui coordinate, così come accade per $\sqrt{2}$, potrebbero non essere neanche suscettibili di una rappresentazione esplicita con tutti i decimali. Ho fornito prima un metodo che mi consente di stabilire la posizione del baricentro con un certo grado di approssimazione. Se voglio essere più accurata devo scegliere dei quadrati più piccoli, che vuol dire anche tenere in maggiore considerazione la geometria della regione. I valori che calcolo rappresentano in effetti l'esatto baricentro, non dell'Umbria, ma della figura formata dall'unione dei quadrati che ricoprono l'Umbria, a cui ho dato il nome di versione squadrata. Posso agire sull'ampiezza dei quadrati per rendere la mia stima più precisa, rivelando dettagli sempre più particolareggiati a mano a mano che i quadrati diventano più fitti e di dimensioni sempre più piccole. Teoremi raffinati, la cui dimostrazione necessita di un bagaglio di nozioni matematiche avanzate, dicono che l'errore che commetto nel prendere per buoni i valori calcolati, al posto di quelli veri, è inferiore alla lunghezza del lato dei quadrati utilizzati per fare il conto. Se uso ad esempio quadrati con il lato lungo un chilometro, invece dei dieci chilometri di prima, dovrò faticare molto per portare a termine il lavoro, ma potrò aspettarmi una valutazione più corretta, con un errore che si aggira intorno a qualche centinaio di metri. Se prendo quadrati ancora più piccoli, dovrò aspettarmi un'ulteriore riduzione dell'errore. Abbandonata l'idea di riuscire a localizzare esattamente il tuo baricentro, potrai comunque avvicinarti ad esso a piacere, con un margine di errore di pochi centimetri, o millimetri, se solo lo vorrai.»

«Assomiglia fortemente alla nozione di *limite* che si impara all'ultimo anno di Liceo o nel corso di Analisi all'università», osserva Dario.

«E' proprio lei!», commenta Clara con soddisfazione. «Ogni volta che stabilisci la misura del lato dei tuoi quadrati, puoi trovare una versione squadrata dell'Umbria, il cui baricentro fornirà un punto sulla carta geografica. Riducendo la grandezza dei quadrati, con l'idea di poterla rendere indefinitamente piccola, potrai constatare che i corrispondenti punti sulla carta tendono ad addensarsi e a convergere al baricentro, posizione che viene assunta *al limite*, cioè nel caso assurdo in cui ci siano infiniti quadrettini puntiformi che hanno per grandezza il nulla.»

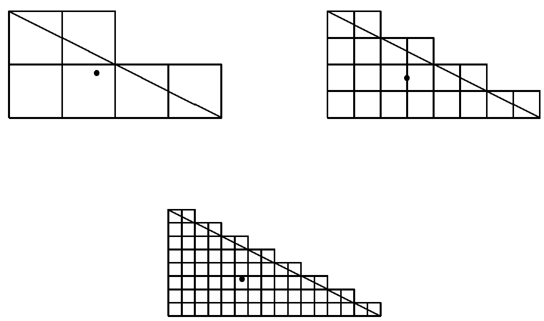
«Però, se riduci l'ampiezza dei quadrati ci sono un sacco di conti da fare ... a migliaia!», osserva Dario.

«A milioni, se vuoi essere molto accurato», precisa Clara, «ed è per questo che sono stati creati i calcolatori. Tali macchine sono in grado di eseguire in pochi secondi quello che tu non riusciresti a fare in anni. Il tutto sta nell'istruirle in modo adeguato e loro ubbidiranno svolgendo, rigorosamente e con assoluta dedizione, istruzioni ripetitive da noi considerate estremamente noiose.

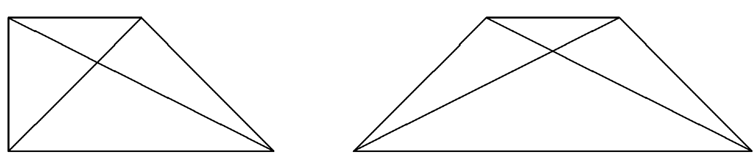
Al contrario di come molti pensano, il vero utilizzatore del *computer* non è colui il quale si limita a selezionare opzioni da un menù precostituito, non sapendo come la macchina poi le realizzi. Il vero utilizzatore è colui che plasma la macchina, imponendole di fare le cose di cui lui ha bisogno. Con un minimo di pratica, puoi programmare anche tu una macchina, in modo da obbligarla al calcolo del baricentro. Puoi spedire successivamente l'elenco delle istruzioni al tuo alieno sull'astronave, insieme alla pianta dell'Umbria. Non devi dimenticare però di dirgli che il calcolo non sarà perfetto, ma che le istruzioni prevedono anche che si fissi in anticipo la grandezza dei quadrati con cui si determina la versione squadrata della figura, e che tale grandezza è in qualche modo legata al margine di errore che può tollerare. Sarà cura poi del tuo amico decidere, in base alle finalità del suo calcolo e al tempo che vuole dedicargli, quanto grandi prendere i quadrati. Sei soddisfatto ora?»

«Direi di si. Anche se devo maturare l'idea ancora un po'», risponde Dario.

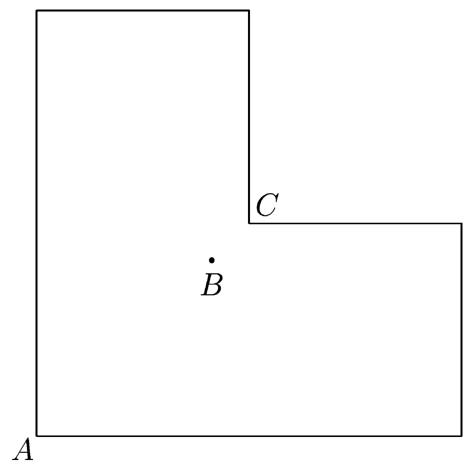
«Ricordati di fare esperienza prima con casi semplici», dice Clara. «Per le figure di cui conosci l'esatta posizione del baricentro non dovrebbe essere difficile controllare il funzionamento della tecnica che ti ho appena spiegato. Poniamo che la figura di partenza sia essa stessa un quadrato, che, come è noto, ha come baricentro il punto di incontro delle diagonali. Indipendendemente dal numero di quadrettini in cui la si divide, il calcolo porterà sempre all'individuazione esatta del baricentro, senza dunque introdurre alcun errore. Ciò è anche dovuto a proprietà di simmetria della figura. Vale la pena che tu faccia questo controllo, giusto per vedere se ti sei impadronito della tecnica a sufficienza. Successivamente, potresti prendere in considerazione un triangolo e decomporlo tramite una quadrettatura sempre più fine. Prendi ad esempio un triangolo rettangolo con un cateto di misura doppia dell'altro. Se ogni volta si dividono i precedenti quadrati in quattro parti, non è difficile stabilire una legge generale per il calcolo ed impostare una formuletta rapida, che permetta di tagliare corto su molti passaggi. Lascio a te il compito di delineare la strategia migliore.



Cerca inoltre di dimostrare in maniera rigorosa che il punto di incontro delle diagonali di un trapezio non ha, in genere, niente a che fare con il suo baricentro.



Ti suggerisco infine di provare a calcolare l'esatta posizione del baricentro B di questa figura, costituita dalla unione di tre quadrati:



Se sei in gamba, dovresti scoprire che la distanza di B da A è cinque volte quella di B da C.»

«Vedo che mi hai assegnato parecchio lavoro "teorico" da svolgere», deduce Dario, «ma credo di averne abbastanza per ora. Gradirei prendermi un attimo di *relax*.»

Nel frattempo Beatrice, anch'essa stanca della conversazione, solletica le narici di Angelo che nel sonno emette sorrisetti isterici. «Sveglia pigrone», gli dice,«è ora di muoversi da questo divano. Fa ancora caldo, ma penso che sia giunta ora di andare a farsi un giretto e di preparare lo stomaco per la cena di stasera, a base di succulento cinghiale in salmì.»

Angelo solleva le palpebre, mentre le immagini di splendide spiagge caraibiche, ricche di palme e affollate da nugoli di incantevoli sirene coi seni al vento, ancora riempiono i suoi occhi.

«Che cosa stavi sognando?», gli chiede Beatrice.

«Io? No ... niente ... spiaggia ... acqua; ecco, stavo sognando il Trasimeno», mente spudoratamente, stiracchiandosi a dismisura.

4

La serata andò bene. Il cinghiale, benché non facilmente conciliabile con il clima caldo, era cucinato ottimamente e tutti fecero il bis. Il giudizio sul Chianti, servito in bicchierini di plastica, non fu positivo, malgrado il prezzo facesse presagire un più alto tenore. La cena fu completata sul lungolago di Passignano con un'abbondante coppa di macedonia col gelato. Al ritorno a casa, seguì la solita partita a tressette e la consueta caccia grossa alla zanzara, condotta con un ricco spiegamento di armamenti convenzionali e non. Il mattino dopo si alzarono tutti piuttosto tardi. Dario andò a fare la spesa. Clara e Angelo fecero le pulizie di casa, mentre Beatrice stirava. Il caldo non accennava a diminuire. Meo sonnecchiava beatamente nel suo angolo preferito.

All'ora di pranzo viene apparecchiato il tavolone. Dopo un antipasto a base di sottaceti e salame locale, i quattro si apprestano a mangiare la pasta, quando Dario rompe la quiete: «Non sono molto convinto di certe questioni riguardanti il baricentro, puoi darmi alcuni chiarimenti?», chiede a Clara.

Come reazione all'intervento di Dario, Angelo sobbalza sulla sedia, facendo cadere il tovagliolo che si era legato al collo. Con gli occhi puntati al soffitto commenta: «Mi sembra di essere nella scena del film *Alien*, nella quale i protagonisti sono serenamente seduti a tavola e, all'improvviso, dalla pancia di uno di loro, esplode fuori il mostro orripilante. Roba da bloccare l'appetito per giorni! A proposito, cos'è sta schifezza?»

«Sono penne ai quattro formaggi», gli risponde Beatrice.

«Intanto il formaggio è uno solo», reclama Angelo, «e definirlo tale mi sembra alquanto forviante. Non ho mai aspirato il gas nervino, ma potrei giurare che ha una forte analogia olfattiva con questo prodotto caseario. Non vorrei che l'ONU ci sanzionasse per detenzione di armi chimiche.»

«Non esagerare, butteremo al più presto l'ultimo pezzo avanzato», annuncia a malincuore Clara, che di norma non spreca nulla. «Per quanto riguarda la questione del baricentro, risponderò alle domande di Dario più tardi. E ora finite la pasta, che vi attendono come secondo delle ottime scaloppine. Peccato che, anche questa volta, Dario si sia dimenticato di comprare il Marsala.»

Finito il pranzo, dopo la sigla di chiusura del *TG2*, vengono riprese le postazioni del giorno precedente. Angelo si sdraia sul divano, questa volta interponendo un asciugamano tra la sua pelle e quella plastificata dei cuscini. Beatrice si inchioda come un ramarro sul marmone del caminetto e Dario ondeggia sulla sedia. Clara apre il dibattito: «Allora, cosa non va?»

«Ieri», comincia Dario, «ci hai fatto notare che ragionare in base alle coordinate, prendendo come direzioni privilegiate ovest-est e sud-nord, era pregiudizievole e che, cambiando il punto di osservazione, avremmo potuto ottenere un risultato diverso. Tuttavia, nel calcolo del baricentro, hai continuato ad insistere sull'orientamento classico, costruendo quadrati con i lati paralleli agli assi del sistema di coordinate riportato sulla mappa.»

«Hai ragione solo in parte», risponde Clara, realizzando di aver sottovalutato la furbizia di Dario, «Mi sono servita di un sistema di coordinate solo per impostare i calcoli. Un simile procedimento poteva essere eseguito anche dopo aver ruotato a piacimento la figura dell'Umbria rispetto agli assi. Il baricentro è, come si suol dire, un *invariante*. Questo vuol dire che, comunque avessi orientato la nostra figura, avremmo alla fine trovato sempre lo stesso risultato.

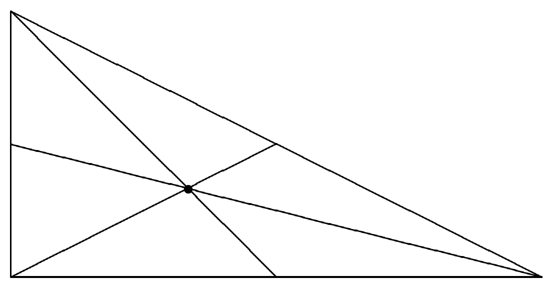
Ricordati che, in linea teorica, il calcolo non deve essere effettuato attraverso un'unica quadrettatura, ma

bisognerebbe considerarne infinite, di grana sempre più fine. Si costruisce una successione di figure, ciascuna formata dai quadretti, a cui avevamo dato convenzionalmente il nome di “versioni squadrate”, che sono via via più assomiglianti alla forma dell'Umbria. Si individua infine il baricentro dell'Umbria come punto limite della successione dei baricentri delle sue versioni squadrate. Se si ruota la figura e si ripete il procedimento, si ottiene una diversa successione di versioni squadrate, ciascuna con il proprio baricentro. E' strabiliante notare che la nuova successione di baricentri tende sempre allo stesso punto limite, cioè al baricentro dell'Umbria.
Dimostrare l'*invarianza* del baricentro nei confronti del sistema di coordinate è tutt'altro che facile, e richiede cognizioni di matematica che, in genere, si apprendono nei corsi universitari. Ci si può comunque fare le ossa discutendo dei casi semplici.»

«Cerchi, quadrati, triangoli ... », propone Dario.

«Ben detto! Con il triangolo si possono dire cose interessanti», osserva Clara con entusiasmo mentre comincia a disegnare.

«In geometria elementare», continua Clara, «il baricentro di un triangolo viene definito come il punto di incontro delle *mediane*, ovvero di quei tre segmenti che congiungono ciascun vertice del triangolo con il punto di mezzo del lato che si trova di fronte a tale vertice. Questa definizione, di tipo matematico, può essere data, evidentemente, senza introdurre un sistema di coordinate, e mostra quindi che il baricentro del triangolo è un *invariante*. Essa coincide con quella di tipo fisico, che vede il baricentro come punto di equilibrio per le forze peso.



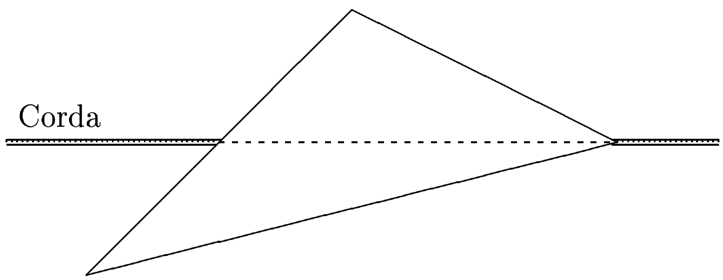
Un altro modo per ottenere il baricentro di un triangolo è quello di mettere in atto la tecnica che ho descritto ieri, la quale richiede per essere portata a termine un tempo infinito, dovendo far ricorso ad un numero crescente di quadrati di dimensioni sempre più trascurabili, costituenti le varie versioni squadrate del triangolo. Interrompere ad un certo istante quest'ultimo procedimento, porta solo ad approssimazioni del baricentro, sebbene si possano rendere i margini di errore piccoli quanto si vuole. Nel caso del triangolo è dunque assai più conveniente far incrociare le mediane, sebbene il trucco non lo si possa adattare ad altre figure più complesse.

Verificare che tutte queste definizioni si equivalgono non è facile. Tuttavia, sempre trattando il caso del triangolo, possiamo mettere in risalto alcuni aspetti che ieri abbiamo sottovalutato, e che sono di fondamentale importanza nel pensiero matematico.»

La voce di Clara rimbomba solitaria nella stanza e sembra strano che Angelo non sia ancora intervenuto nel dialogo. Basta un'occhiata per capire che non avrebbe potuto: sia lui che Beatrice sono infatti sprofondati nel sonno. In particolare, Beatrice, che sembra fatta di pezza, giace a pancia in su con una gamba a penzoloni, la bocca aperta ed un avambraccio a mezz'aria.

Dopo una breve pausa, Clara riprende: «Dimentica per un momento quello che ho detto poco prima sul triangolo e supponiamo che si voglia valutarne il baricentro in modo empirico. Basiamoci sull'idea, che avevi proposto ieri, di voler lavorare sulla figura appendendola in modo da farle assumere una posizione orizzontale; sebbene, per meglio mettere in pratica quello che sto per dirti, sarebbe più semplice lasciare penzolare il triangolo dopo averlo appeso per uno dei vertici.

Immagina quindi di stendere una cordicella tra due appigli, in modo che stia ben orizzontale. Posa poi un triangolo, ritagliato da un cartoncino, in modo che si mantenga in equilibrio sopra la corda. Scoprirai che, fra le tante possibili posizioni di equilibrio, c'è quella che può essere realizzata facendo coincidere la corda con una delle mediane del triangolo. Si intuisce da ciò che il baricentro dovrà trovarsi su codesta mediana ... »



«Ferma là!», ammonisce Dario. «So come proseguire. Metto il triangolo in equilibrio sulla corda sfruttando un'altra mediana. Se il baricentro deve trovarsi su entrambe le mediane non può che essere il punto di incontro di esse.»

«Sì, ma il bello deve ancora venire», proferisce Clara. «Ricordati che c'è una terza mediana. Chi ti dice che questa passi proprio per il baricentro che hai appena trovato? E se invece incontrasse le altre mediane in differenti punti? Potrebbe cominciare a sorgere in noi il dubbio che non ci sia un solo baricentro e che il problema che abbiamo sinora trattato sia ambiguo.»

«Ma può un problema avere più di una soluzione?», domanda Dario sgranando gli occhi.

«Come no! Mi stupisco della domanda. Facciamo un piccolo esempio. Se sottrai 3 da 10 e moltiplichi il risultato per 3, ottieni $(10 - 3) \cdot 3 = 21$. Se io adesso ti chiedessi di trovare quel numero che, dopo averlo sottratto da 10, e aver moltiplicato tale differenza per il numero stesso, si abbia come risultato 21, cosa risponderesti?»

«Direi che il numero è ovviamente 3», arguisce Dario.

«Sicuramente», ammette Clara, «Ma c'è anche 7. Non va bene anch'esso? Ecco: $(10-7)\cdot 7 = 21$. Vedi che non tutti i problemi ammettono una risposta univoca.

Fortunatamente la questione non si pone per il nostro problema. Comunque sia fatto il triangolo, le sue mediane si incontrano tutte e tre nel medesimo punto, identificando in modo inequivocabile il baricentro. Questa è una proprietà che si può dimostrare facendo uso di principî elementari della cosiddetta geometria euclidea, quella della riga e compasso per intenderci, i cui fondamenti risalgono all'antichità greca. Sono convinta che farebbe bene a chiunque apprendere qualche rudimento di geometria elementare, perchè essa è alla base della logica, del rigore matematico e del pensiero scientifico in generale. Inoltre, aiuterebbe forse a diradare lo scetticismo che la gente ripone verso le discipline matematiche.

Il nucleo della dimostrazione consiste nel far vedere che il punto di incontro di due generiche mediane divide ciascuna di esse in due parti, una di lunghezza doppia rispetto all'altra, con la parte più lunga avente un'estremità coincidente con il vertice del triangolo. Con tale caratterizzazione, si arriva subito alla conclusione ragionando come segue. Si fanno dapprima incrociare due mediane, che si divideranno così reciprocamente nella maniera stabilita. La terza mediana non può incontrare la prima mediana in un punto diverso da quello appena trovato. Se così fosse, la prima mediana verrebbe suddivisa in parti che non sono di lunghezza l'una il doppio dell'altra, in contrasto con quanto si era ammesso in precedenza. Discorso analogo vale quando si interseca la terza mediana con la seconda. Quindi, ci deve essere un unico baricentro.»

«Per fortuna!», dice Dario.

«Per fortuna sì!», concorda Clara. «Ma la questione si ripresenta di nuovo per quanto riguarda il baricentro dell'Umbria, dove le regole fondamentali della geometria elementare con riga e compasso non possono più venirci in aiuto. Per calcolare il tuo baricentro in modo empirico puoi ancora mettere la pianta dell'Umbria, ritagliata da un cartoncino, in equilibrio orizzontale sulla corda. Puoi tracciare poi con una matita l'impronta della corda sulla figura. Cercherai successivamente l'equilibrio orientando la figura in modo diverso, identificando così il baricentro come il punto di incontro dei due segmenti segnati a matita. Ma chi ti dice che, sperimentando ulteriori situazioni di equilibrio, non si individuino altri baricentri? Fortunatamente ciò non accade, ma questa volta l'analisi diventa molto più impegnativa e la geometria elementare viene sostituita da ciò che i matematici chiamano calcolo infinitesimale.

Ti sto dicendo ciò perchè tali aspetti sono di cruciale importanza in matematica. Può essere pericoloso infatti dare una definizione e non considerare che ci possano essere più oggetti rispondenti a tale definizione. Se io parlo di x come di quel numero tale per cui $(10 - x) \cdot x = 21$, c'è chi potrebbe intendere che x valga 3. Altri potrebbero, giustamente, pensare che x valga 7, generando in tal modo incomprensioni. Se volessi veramente stabilire una volta per tutte che $x = 3$, allora dovrei fornire altre informazioni. Per esempio, potrei dire che x è il più piccolo numero tale per cui $(10 - x) \cdot x = 21$. Si può facilmente realizzare che non esistono altri valori di x che soddisfano l'equazione e che siano più piccoli di 3.

Tale discussione può sembrare artificiosa, ma circostanze analoghe capitano sovente nella vita quotidiana. Se un amico ti lasciasse un messaggio alla segreteria telefonica, dicendoti di venirlo a prendere in stazione a Chiusi, perchè arriverà l'indomani con il treno da Arezzo, ti metterebbe in seria difficoltà, essendoci più treni al giorno nella tratta Arezzo-Chiusi. Le informazioni del tuo amico sono, a tutti gli effetti, insufficienti, e il problema ammette più di una soluzione. Basterebbe, in questo caso, precisare l'ora di arrivo.

Abbiamo pure imparato che ci sono casi in cui i dati forniti, pur essendo sufficienti ad identificare la soluzione univocamente, non permettono tuttavia la sua valutazione in modo chiaro e per esteso, così come accade per il numero $\sqrt{2}$, o per il baricentro dell'Umbria. Il tuo amico potrebbe infatti essere dispettoso, comunicandoti che arriverà con il treno il cui conducente è il più giovane fra quelli che faranno quel tragitto in quel giorno. Considerato estremamente improbabile che ci siano dipendenti delle ferrovie che abbiano la stessa identica data e ora di nascita, il treno verrebbe quindi ad essere univocamente definito, ma la sua individuazione appare tutt'altro che scontata. Questa informazione, per quanto accurata, non ti aiuterebbe molto agli effetti pratici.»

«A dire la verità», osserva Dario, «io preferirei cancellare il tizio dalla lista dei miei amici e mollarlo in stazione a Chiusi. A proposito, mi hai fatto venire in mente che domani a mezzogiorno arriverà Ester.»

«Permettimi di aggiungere qualche ulteriore commento», ribatte Clara. «Oggi mi sento in vena di divagazioni. Come avrai capito, la definizione matematica viene in genere fornita a tavolino, senza bisogno quindi di ricorrere ad esperienze pratiche. Le sue implicazioni possono essere pure studiate a tavolino. Si possono sviluppare varie teorie senza la necessità di ricorrere agli esempi pratici. Questo è quello che differenzia la matematica dalle altre discipline scientifiche, cioè la sua possibilità di astrazione. Spesso, affinchè il significato dei risultati trovati venga apprezzato, occorre che ci sia un riscontro con la realtà, cioè che qualcuno, ogni tanto, si prenda la briga di verificare che l'approccio matematico non sta portando troppo lontano dai fenomeni fisici. Secondo gran parte dei matematici puri, ciò è tuttavia riduttivo, essendo per essi la matematica sinonimo di libertà e creatività. Il matematico non deve sentirsi vincolato: egli può alterare le regole del gioco a piacere, anche negando quello che l'esperienza quotidiana rende evidente. E' un modo per aprire nuove frontiere della conoscenza, anche se quelli con i piedi ben saldi a terra possono storcere il naso. Non è la prima volta che definizioni considerate audaci, campate in aria e contrastanti con la realtà, si sono rivelate successivamente utili allo studio pratico di certi fenomeni dei quali non si era a conoscenza prima.

Tante volte, quello che più interessa al matematico è l'eleganza ed il valore assoluto dei risultati ricavati. Un po' come un'opera d'arte, che va apprezzata per quello che è, senza cioè ricercare i motivi che hanno indotto l'artista a comporla.»

Un fruscìo proveniente dal divano, accompagnato da lamenti strozzati, interrompe la conversazione. E' Angelo che sta facendo ritorno dal mondo dei sogni. «Siete ancora lì a discutere?», dice sorpreso. «Che sete! Ce n'è ancora di limonata?»

Si alza a fatica e va verso il frigorifero. Apre lo sportello ma lo richiude istantaneamente, dicendo con aria nauseata: «Ma che roba! Chi avete ammazzato? Non sarà mica il padrone di casa! Dai, ditemi che è lui.»

«Cosa stai insinuando?», domanda Dario.

«Ci sono pezzi di cadavere», spiega Angelo, «e un fetore ... »

«I pezzi di "cadavere" sono cosciotti di tacchino, che finiranno in pentola domenica», spiega Clara.

«E la puzza?», dice Angelo con le mani ai fianchi e con l'intento di estirpare una confessione. «So bene cos'è! L'ho riconosciuto! E' il formaggio. Quello che avrebbe dovuto prendere la strada della spazzatura già da molto tempo.»

«Uffa! Non polemizzare sempre», risponde Clara cercando di minimizzare, mentre le guance le diventano rosse.

5

Il dialogo sul formaggio desta Beatrice. «Uuh! Mi sono addormentata. Ma che ore sono?»

«Fatti un altro pisolino», le dice Dario, «usciremo solo tra un paio d'ore. Oggi pare che faccia più caldo degli altri giorni. Andremo a visitare quell'abbazia di cui parlavi l'altro giorno, ma non ho alcuna intenzione di salire in auto ora. L'ho anche parcheggiata in mezzo al piazzale, a decine di metri dal più vicino posto in ombra. Io e Clara stavamo giusto ponendo termine alla discussione sul baricentro. Avrei però ancora qualche questione da porle.»

Interviene Angelo: «Fate pure. Io ormai mi sono rassegnato. Nel tardo pomeriggio andrò in un'agenzia turistica ad informarmi sui Caraibi per la prossima estate. Ormai fanno di quei prezzi! Con poco più di quello che spendiamo qua, ti puoi fare viaggio e soggiorno alle Isole Vergini. La vita notturna è assicurata e niente matematici tra le scatole.»

Dopo aver detto la sua, Angelo si acquatta in un angolo fingendo di leggere il giornale. Sappiamo bene, invece, che ha intenzione di origliare. Egli sopprime a fatica la gelosia, causata da questa inaspettata attenzione di Dario nei confronti di Clara.

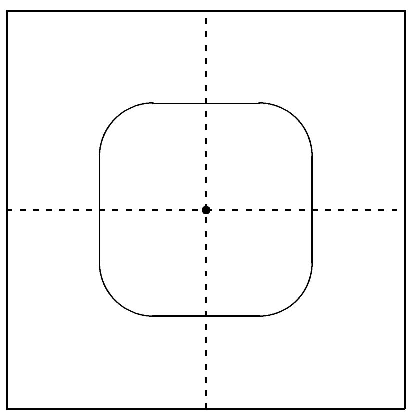
Dario può quindi ricominciare. «Cosa faccio con il lago Trasimeno? Devo considerarlo come un buco? Questo corrisponderebbe a togliere i quadretti che ci finiscono dentro, quando eseguo il calcolo approssimato del baricentro.»

«Fai come vuoi», risponde Clara. «Sei libero di gestire la tua pianta dell'Umbria come meglio credi. Se pensi che il lago vada considerato come un buco, fai pure. E' ovvio che aprire un foro nella figura avrà effetto sulla posizione del baricentro, visto che la figura viene "alleggerita" da una parte. Tuttavia, forse senza rendertene conto, hai sollevato un'altra questione di vitale importanza, che merita adeguata discussione. Hai pensato cosa potrebbe accadere se il lago Trasimeno, invece di essere situato nell'angolo ovest della regione, fosse piazzato nel mezzo?»

«Nessun problema! Applico pari pari lo stesso procedimento», risponde Dario con sicurezza.

«E' vero, il procedimento non cambierebbe, ma potresti finire col trovare un punto, candidato ad essere il baricentro, che cade in pieno centro al lago, dove l'acqua è più profonda, e dove nella tua figura con il buco verrebbe a mancare l'appiglio per poterla mettere in equilibrio», osserva Clara.

«Vorresti insinuare che ci sono figure che non hanno il baricentro?», arguisce Beatrice, ora ben sveglia. «A pensarci bene, se si ritaglia una bella porzione all'interno di un cartoncino quadrato, poi si rimane senza il punto di mezzo.»



«In modo virtuale, il baricentro c'è ancora», osserva Clara. «E' un'entità matematica che non corrisponde ad alcun punto effettivo della figura, che, tuttavia, continua a conservare un forte interesse nelle applicazioni della fisica. Supponiamo che il nostro problema di partenza sia posto in questi termini: trovare <u>il punto della figura</u> che ne rappresenta il baricentro. Se una macchina eseguisse i calcoli per noi, sarebbe buona norma che controllasse alla fine se il punto trovato appartiene o no alla figura. Nel caso che la risposta sia negativa, vorrebbe dire che il problema è stato impostato male, cioè non ha soluzione. Resta inteso che il baricentro continua ad esistere, ma non può essere utilizzato come appiglio per poter agganciare la figura, affinché stia orizzontale. Capita non di rado che, pur in buona fede, si diano delle definizioni che non ammettono alcun oggetto che le soddisfi. Quando vi avevo detto che era bene non essere avventati e che, prima di passare alla realizzazione, conveniva fare delle analisi teoriche, includevo anche la possibilità che il problema non ammettesse soluzione, vanificando così ogni approccio di tipo sperimentale.»

«Dacci degli altri esempi», chiede Dario.

«Sempre sulla falsariga di problemi che abbiamo già trattato», spiega Clara, «potrei chiederti di trovare quel numero x tale per cui $(10-x)\cdot x = 26$. Questa equazione potrebbe scaturire da qualche branca della scienza e c'è chi potrebbe dedurre proprietà interessanti su x per il solo fatto che ne sia soluzione. Fermo restando che è lecito sempre porsi i dubbi riguardo all'unicità di x, la prima cosa da verificare è che ci sia almeno un valore di x soddisfacente l'equazione. Possibilmente, tale analisi deve essere condotta prima che uno si metta alla ricerca del metodo per il calcolo di x. Si potrebbe osservare che, dato un numero y, il prodotto fra $10 - y$ e y realizza il valore più grande solo quando $y = 5$. Se diamo per buono questo, è evidente che al massimo il prodotto $(10 - y) \cdot y$ farà 25, e dunque non esisterà alcun x per cui il prodotto di $10 - x$ per x assume il valore 26.

Si potrebbero scrivere trattati interi partendo da questo assunto: sia x il numero, o i numeri, soddisfacenti l'equazione $(10 - x) \cdot x = 26$, allora *bla bla bla*. Pare ormai chiaro che tali testi sarebbero privi di significato. Attenzione però, il buon matematico non butta via mai nulla ... »

«Neanche il formaggio in avanzato stato di decomposizione!», osserva Angelo, con una punta di cattiveria.

«Volevo dire», prosegue Clara, «che il matematico riesce a far tesoro anche delle esperienze fallimentari. E' vero che non esistono dei valori di x che soddisfano la nostra equazione, ma è pur vero che, se questa ammettesse soluzioni, potremmo arrivare ad altre importanti ed utili conclusioni. Basta dire che x è un numero "immaginario" e continuare a trattarlo come se esistesse davvero, sommandolo e moltiplicandolo ad altri numeri, immaginari e non, attraverso regole costruite *ad hoc*. Nel passato, tale idea ardimentosa ha aperto di fatto nuovi orizzonti della matematica, ed i numeri "immaginari" sono diventati ormai di pubblico dominio, come alcuni di voi hanno già imparato a scuola.

Un altro esempio potrebbe riguardare quel famoso amico da andare a prendere in stazione. Se entrambi non sapete che in quel giorno c'è sciopero totale dei trasporti, cosicchè non esiste alcun treno viaggiante, ti vedresti costretto ad attendere in una stazione deserta un evento che, nell'arco di quel giorno, non accadrà mai. La morale è che avresti dovuto prima compiere un esame teorico, leggendo i quotidiani o ascoltando il telegiornale.»

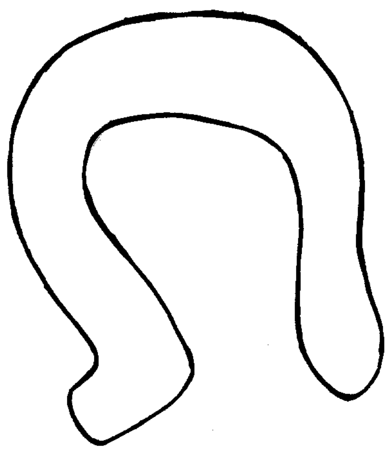
«Uuh! Ricordiamoci che domani abbiamo a pranzo Ester», commenta Beatrice.

«Ma come facciamo a sapere in anticipo, con uno studio teorico, se il baricentro che troveremo è reale o "immaginario"?», chiede Dario. «Io posso accorgermi che la figura ha un foro nel mezzo, e quindi evitare di mettermi a far conti. Ma una macchina? Che può fare?»

«La domanda è pertinente», risponde Clara. «La risposta è che non si può fare molto. E' vero che la fatica maggiore spetta alla macchina, per cui potremmo verificare la plausibilità del risultato a lavoro fatto. Tuttavia, rischiamo di impegnare il calcolatore in una ricerca inutile, a scapito di altre realizzazioni, magari più importanti. Quello che può fare il matematico è indicare delle categorie di figure per le quali il procedimento funziona con certezza. In altre parole, per tali figure si dà la garanzia che il baricentro calcolato corrisponda effettivamente ad un punto giacente sulla figura. Per quei casi che non rientrano in tali categorie, per i quali si è quindi incerti sull'esito, si preferisce mettere l'utilizzatore in guardia relativamente ad eventuali "effetti indesiderati". Un po' come nelle ricette dei farmaci.»

«E' facilissimo stabilire quali siano le figure che non vanno bene: sono tutte quelle senza buchi», dice Dario, con il dito indice destro puntato verso l'alto.

«Direi di no», osserva Clara. «Direi proprio che non basta togliere i buchi. Guarda cosa accade con un ferro di cavallo.»

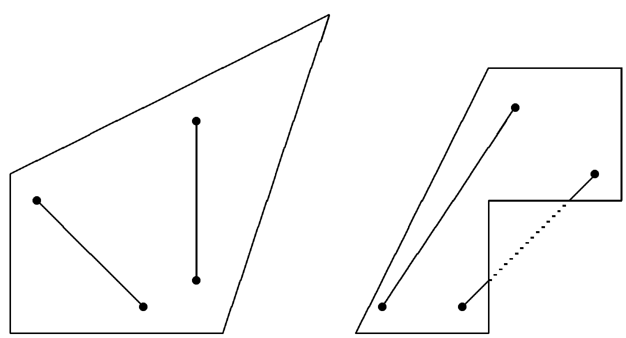


Sono già stati fatti commenti a proposito dell'incapacità di Clara di disegnare. Il "ferro di cavallo" non sembra essere una delle peggiori realizzazioni; forse si intravede qualche speranza di recupero.

«Lo sapevo! Ti ha fregato anche questa volta», comunica Beatrice a Dario. Questa frase reca sollievo al cuore infranto di Angelo.

«Hai ragione», ammette Dario. «Il ferro di cavallo non ha buchi ed il baricentro dovrebbe cadere in un punto nel mezzo, che non fa parte della figura. Questo in virtù del fatto che la figura è storta.»

«In matematica, possono essere individuate e messe al bando in modo opportuno le figure che tu definisci "storte"», spiega Clara. «Per esempio, ci si può restringere a lavorare con quelle che vengono definite come figure *convesse*, le quali sono panciute e senza insenature. Si introducono nel seguente modo. Presi comunque a caso due punti appartenenti alla figura, il segmento che li congiunge deve rimanere tutto all'interno della figura. Si si riesce a trovare almeno una coppia di punti per cui il segmento congiungente ha parti che si trovano anche all'esterno della figura, vuol dire che quest'ultima non è convessa. Ecco un esempio di figura convessa e di una non convessa.»



«Controllare che una figura è convessa non è per niente facile», aggiunge Clara. «E' scontato che le più note, quali cerchi, quadrati, triangoli, lo siano. Per noi umani basta un colpo d'occhio. Se volessimo far lavorare una macchina la faccenda sarebbe più complicata. Bisognerebbe infatti controllare, l'uno dopo l'altro, tutti gli infiniti segmenti che si possono costruire con due punti presi a caso nella figura. Più semplice è in genere mostrare che una certa figura non è convessa, bastando esibire un solo segmento che, pur congiungendo due punti appartenenti alla figura, non rimane per intero all'interno di essa.

L'aspetto positivo è che, nell'ambito delle figure convesse, vale il teorema che auspicavamo, cioè che il loro baricentro non può cadere all'esterno della figura. Il problema rimane aperto per quanto riguarda la pianta dell'Umbria, non essendo questa una figura convessa. Tuttavia, se non consideriamo il lago Trasimeno come un buco, e prendiamo nota del fatto che le frastagliature del bordo non sono troppo accentuate, si potrebbe dimostrare in maniera rigorosa che il baricentro non ha possibilità di cadere fuori della regione.

Il meccanismo per trovare il baricentro di una figura convessa può essere ancora quello della cordicella sottesa orizzontalmente. Posta la figura in equilibrio sopra la corda, se ne prende la traccia con la matita. Essendo la figura convessa, tale traccia non può che essere fatta di un tratto unico senza interruzioni, a causa del fatto che non ci possono essere buchi o grosse insenature ad interromperla. Si prende poi un'altra traccia ruotando opportunamente la figura, trovando infine il baricentro nel punto di intersezione dei due segni a matita. Anche tale punto di intersezione deve appartenere obbligatoriamente alla figura. Se la figura non fosse convessa potremmo avere dei tracciati interrotti, con il rischio di non riuscire ad individuare empiricamente il baricentro. Attenzione! Il fatto che la figura non sia convessa non implica per forza che il procedimento non debba funzionare. Potremmo essere fortunati o no a seconda delle circostanze.

Vorrei approfittare della vostra pazienza per precisare alcune altre cose. Il fatto che sia automatico trovare una posizione di equilibrio della figura sulla corda non è da darsi per scontato. Nella pratica infatti non ci si riesce mai, tendendo la figura a cadere da una parte o dall'altra, anche muovendola con molta attenzione. Si può sfruttare questa peculiarità proprio per ipotizzare l'esistenza di una posizione intermedia per la quale la figura non si sbilancia né da una parte né dall'altra, anche se di fatto l'equilibrio perfetto non si riesce a realizzare. E' necessario però fare un'ipotesi legata al concetto di *continuità*, anch'esso di primaria importanza in matematica. Un esempio di applicazione di questo concetto potrebbe essere riassunto in questa affermazione: se io mi muovo da una stanza ad un'altra comunicante, dovrò passare per la loro porta comune. Ammettiamo che non esistano altri varchi di comunicazione tra le camere, onde evitare scappatoie alternative. In pratica, se ad una certa ora mi trovo nella prima stanza e un'ora dopo nella seconda, ci dovrà essere stato un istante in cui ho varcato la porta. Potrei averla anche attraversata più volte, ma l'importante è che almeno una volta l'abbia fatto. Ritornando alla figura sulla corda, spero che il parallelo sia chiaro: se la figura è sbilanciata da una parte e poco dopo è sbilanciata dall'altra, e suppongo di aver mutato la sua posizione con *continuità*, tenendola appiccicata alla corda, allora bisognerà che nel passaggio fra una configurazione e l'altra si sia attraversata una posizione di equilibrio. Questo ragionamento funge da garanzia per l'esistenza di tale stato di equilibrio, anche se non si è in grado di mantenerlo.»

«Mi sembrano cose fin troppo ovvie», commenta Beatrice.

«Capisco che siano cognizioni ormai ben consolidate e dure da sradicare, ma i matematici, che tendono ad essere scettici su tutto, talvolta negano che siano vere», dice Clara.

«Ti fornisco un esempio di fenomeno discontinuo. Se giri un filmato e poi tagli proprio i fotogrammi di quando attraversi la porta, durante la proiezione sembrerà che passi di scatto da una stanza all'altra. In questo caso non potrai affermare di averla effettivamente varcata», osserva Dario.

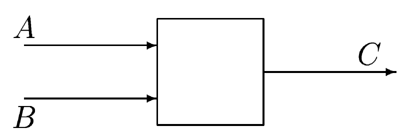
«Giusto! Corretto!», dice Clara. «Ma esistono esempi meno "artificiali". Un caso semplice potrebbe essere quello del *flip-flop*.»

Dal fondo tuona la voce di Angelo: «E cos'è? Una nuova marca di ghiacciolo?»

«No! Bestiaccia!», risponde Clara. «E' un dispositivo logico, utilizzato in gran quantità in tantissime macchine elettroniche. E' una piccolissima unità di memoria, la più semplice realizzabile con *transistors.*»

«E come funziona?», domanda Beatrice.

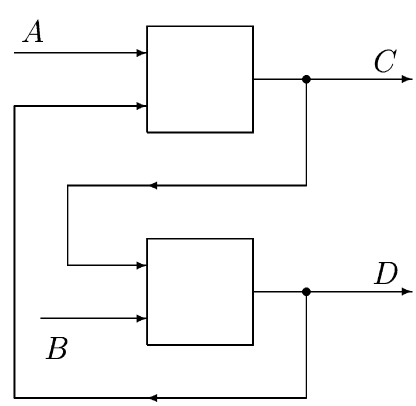
«Per spiegarvelo devo prima descrivere cosa è una unità logica di tipo *nand*», dice Clara facendo lo schizzo di uno scatolotto con delle frecce.



«Ecco. L'unità *nand* è una sorta di "scatola nera" consistente di due ingressi, A e B, ed un'uscita C. In elettronica digitale sono ammessi "segnali" di ingresso e uscita che sono solo o di tipo "0" o di tipo "1". Se ai due ingressi sono presenti dei segnali, l'unità *nand* reagisce esibendo un certo segnale in uscita. In particolare, in C è presente sempre il segnale "1", tranne che in un caso, in cui si ha "0", che è verificato quando agli ingressi si presentano due segnali entrambi di tipo "1". La spiegazione risulta forse più semplice se riassumiamo il tutto in una tabellina, dove, al variare delle possibili combinazioni che si possono presentare agli ingressi A e B, faccio corrispondere l'informazione che si presenta all'uscita C:

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'unità *nand* da sola serve a poco. Qualunque dispositivo logico, anche quello per esempio che regola le funzioni e i programmi nelle moderne lavatrici, ne ha a migliaia. In un *computer* ce ne sono a milioni. Basta comunque connettere qualche unità *nand* in modo opportuno, per avere subito dei dispositivi interessanti. Otteniamo il nostro *flip-flop* se ne prendiamo due, collegate nel modo seguente:



Cerchiamo di capire come funziona. Supponiamo che in A sia presente il segnale "0". Dunque, facendo riferimento alla tabellina precedente, in C dovrà essere presente il segnale "1", indipendentemente da ciò che avviene all'altro ingresso dell'unità *nand* in alto. Il segnale in C si propaga anche ad uno degli ingressi dell'unità in basso. Supponiamo inoltre che all'ingresso B ci sia il segnale "1". Gli ingressi dell'unità in basso sono pertanto tali da far scattare a "0" l'uscita D. Fin qui niente da obiettare, spero. La situazione è stazionaria e può rimanere tale indefinitamente. Nulla del resto viene alterato se ora portiamo l'ingresso A al valore "1".

Successivamente, schiacciando un pulsante, mettiamo a "0", anche per qualche frazione di secondo, l'ingresso B. Avviene la rivoluzione e parte un processo a catena. L'uscita D scatta ad "1", e tale segnale viene anche trasferito all'ingresso dell'unità in alto. Essendo A pari ad "1", l'uscita C diviene "0". Tutto ritorna in quiete, con la differenza che C e D si sono scambiati i ruoli. In pratica, l'impulso presente, anche per poco tempo, in B è stato "memorizzato" in modo duraturo dal *flip-flop*, mediante una trasformazione speculare. Quando azioniamo il telecomando del televisore, premiamo un pulsante e subito lo rilasciamo. L'apparecchio rimane comunque acceso, perchè un *flip-flop*, mutando il suo stato, ha memorizzato il nostro messaggio. Ciò accadrà fino a quando non si ripristina la situazione precedente, il che avviene attivando il pulsante si spegnimento.»

«E' una specie di altalena», esordisce Beatrice.

«Sì, è un'altalena», risponde Clara, «ma senza posizioni intermedie. Il dispositivo è sempre sbilanciato, o da una parte o dall'altra, e non risulta che nel passaggio da uno stato all'altro, che si suppone essere istantaneo, si attraversino configurazioni di equilibrio simmetrico.»

«E così oggi abbiamo anche indagato dentro il telecomando della *TV* », osserva Angelo. «Venite. Usciamo. Offro a tutti un *flip-flop* nella migliore gelateria.»

6

Il mattino dopo, verso le undici, arrivò Ester, come sempre tutta trafelata e logorroica, malgrado il pesante caldo. Era una sosta tecnica. Sarebbe ripartita in serata per andare dai parenti al sud e viaggiare nelle ore più fresche. Rimase in prevalenza con Beatrice fino a pranzo, per raccontarle gli ultimi pettegolezzi sulle loro comuni amiche, rimaste in città fino a ferragosto.

«E' pronto!», annuncia Clara ad alta voce. «Ester non aspettarti grandi manicaretti, ho potuto preparare solo delle penne ai quattro formaggi e delle scaloppine. Purtroppo siamo rimasti senza Marsala e Dario si dimentica tutte le volte di comprarlo.»

«Bisogna imprimerglielo nella testa con un bel *flip-*

flop», esordisce Angelo, con tono leggermente polemico.

«Cos'è questa storia?», domanda Ester.

«Niente», risponde Dario. «In questi giorni Clara ci ha iniziato alle gioie della matematica.»

«Dimmi. Dimmi», implora Ester concitata. «Può essere una trovata interessante per il mio lavoro. Noi *managers* dobbiamo saper riconoscere e sfruttare le buone idee.»

Ester, laureata in economia, dirigente in una ditta che distribuisce fertilizzanti, non perde occasione per far notare come la sua posizione sociale sia di gran lunga superiore alla media, potendo contare su un buon reddito, che le permette di avere una bella auto ed un abbigliamento sempre alla moda. Proprio lo stile di vita non apprezzato da Angelo.

«Clara mi ha aiutato a risolvere il problema di trovare quel punto che sta esattamente al centro dell'Umbria», spiega Dario.

«Ah sì! Conosco la questione», dice Ester, socchiudendo gli occhi con l'aria di persona navigata, come se queste cose risalissero ormai alla sua prima infanzia. «C'è un certo numero di città e bisogna trovare quel punto nel mezzo, in modo che sia il più vicino possibile a ciascuna di esse, senza scontentare troppo le altre. Ad esempio, se dei camion portassero del materiale in ognuna di tali città a partire da detto punto, come risultato si avrebbe un risparmio di tempo e gasolio.»

«Mah!» E' l'unica cosa che riesce a pronunciare Dario, non sapendo bene in che relazione stia ciò che ha detto or ora Ester con quello che gli è stato insegnato da Clara. Di fronte ad una nuova prospettiva di definire il centro, tutte le fatiche fatte gli appaiono vane. Sul suo volto si dipinge un'espressione di panico, mentre si volta verso Clara in attesa di illuminazione.

E Clara non esita ad intervenire: «Diciamo che in questi giorni abbiamo esaminato la questione sotto altri punti di vista, ma anche la tua proposta ha tutte le ragioni di essere presa in considerazione. Se vuoi, più tardi ne parliamo. Ad Angelo non piace che a tavola si tocchino questi argomenti. Dice che gli rovinano l'appetito.»

Tutti gli sguardi sono ora puntati su Angelo che, con il tovagliolo macchiato legato intorno al collo, e le guance rigonfie di pasta, si ingozza beato senza prendersi troppa cura dell'ironia di Clara. Se i presenti potessero interpretare i suoi pensieri, vedrebbero Ester, al centro di un piazzale sommerso dal fango, con *tailleur* e tacchi alti, dare direttive, gracchiando ad un plotone di autisti con i camion stracarichi di letame, in attesa di partire per varie destinazioni, con percorsi da lei personalmente scelti al fine di ottimizzare i consumi ed i tempi di percorrenza.

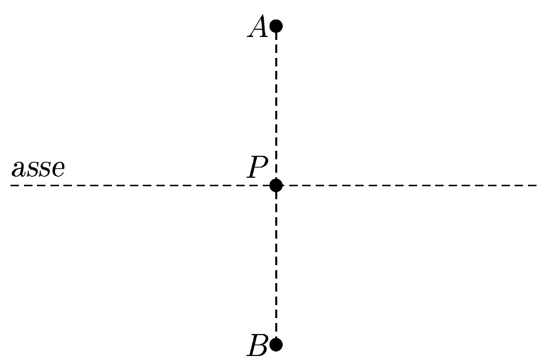
Dopo aver intinto a lungo i Cantucci nel Vinsanto (la scorta di bottiglie, acquistate da Dario, sembrava non finire mai), la compagnia si appresta al solito dibattito pomeridiano. Angelo, che mal sopporta Ester, decide di uscire e si sdraia all'ombra del castagno, dove può leggersi con tutta calma una guida turistica di Puerto Rico, comprata la sera prima in libreria. Immancabilmente, la sua attenzione si rivolge subito al capitolo dedicato alla vita notturna.

Comincia Clara che, rivolgendosi a Dario, dice: «Vediamo se riesci a mettere a frutto quello che hai appreso. Ti propongo il seguente problema. Uno disegna un certo numero di punti a caso su un foglio, poi si domanda se sia possibile trovarne un altro che abbia la caratteristica di stare un po' "vicino" a tutti. Il concetto si può più correttamente esprimere così: misurando la distanza che intercorre fra questo nuovo punto e il più lontano da esso tra i punti assegnati, si vuol fare in modo che tale distanza sia resa minima. E' quello che viene correntemente chiamato problema di *mini-max*. E' piuttosto un rompicapo, quindi vedi di fare attenzione nel ragionare.»

Dario ha un lieve tentennamento, ma si riprende subito. «Intanto è bene non complicarsi troppo la vita», dice con aria professionale, come se la frase fosse farina del suo sacco, «per cui di punti, inizialmente, me ne scelgo pochi. Direi due per cominciare. Li chiamerò A e B.»

Rimugina ancora un po', e poi risolve la questione con perspicacia. «Il mio nuovo punto, che chiamerò P, deve essere situato in modo che la sua distanza da A sia pari a quella da B, perchè, democraticamente, voglio che P sia vicino ad entrambi senza preferenze. Anche perchè, se io riducessi la distanza di P da A, rischierei di aumentare quella di P da B, ed io sono costretto a considerare la più grande di tali distanze. Pertanto, deduco che P dovrà essere il punto medio del segmento che congiunge A con B.»

«Molto bene!», afferma Clara, mentre Ester e Beatrice annuiscono. «Cerchiamo di mettere più a fuoco la problematica. Si può cominciare a congiungere A con B, ottenendo quindi il segmento AB. Poi si costruisce l'*asse* di quest'ultimo segmento, che sarebbe la retta perpendicolare ad AB, passante per il punto medio di AB. Sull'asse ci sono in pratica tutti quei punti la cui distanza da A è pari alla distanza da B. Il tuo punto P deve trovarsi sull'asse. Non conviene infatti che stia altrove, in quanto ciò comporterebbe uno squilibrio, favorendo un punto rispetto all'altro. Infine, nell'ambito dei punti che si trovano sull'asse, il punto da te indicato, cioè quello che sta all'intersezione con il segmento AB, è sicuramente a pari distanza da A e da B, e rende minima tale comune distanza. Un altro modo di vedere le cose è di considerare P come il centro del più piccolo cerchio contenente i punti A e B.»

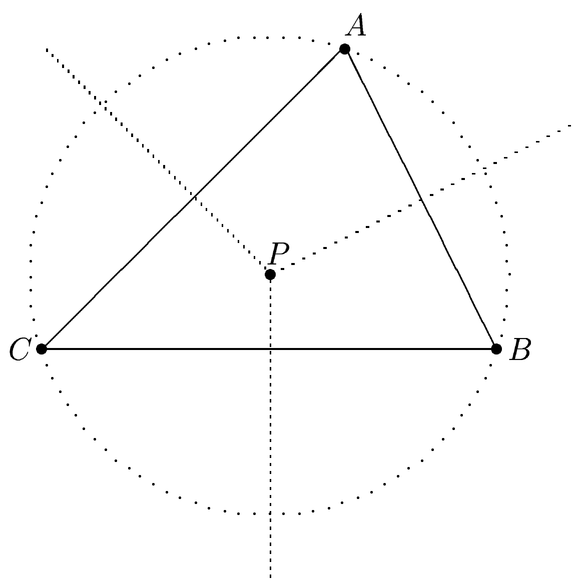


«Prima di passare a casi più complicati», continua Clara, «il buon matematico dovrebbe riflettere sui i due aspetti che ho sollevato ieri, i quali sono: esistenza ed unicità. L'esistenza del punto P cercato, è confermata dal fatto che sono in grado di indicarlo con esattezza e di dimostrare con rigore che non si può ridurre ulteriormente la distanza di P dal punto A, senza accrescere la distanza di P da B, o viceversa. Dimostrare l'unicità di P significa invece non essere in grado di indicare altri punti che godono delle stesse proprietà. Questo vuol dire che, qualunque altro punto scelga, diverso da P, riesco sempre a trovarne almeno un altro, anche molto vicino, che permetta la riduzione sia della distanza da A che di quella da B. In questi ragionamenti, l'ipotesi di *continuità*, pure menzionata ieri, è da non sottovalutare. Passiamo ora al caso di tre punti: A, B e C. A voi la prima mossa!»

«Tocca a me! Tocca a me!», reclama Beatrice. «Ho già capito tutto. Il punto P deve stare sull'asse del segmento AB, per mantenersi a pari distanza dai punti A e B. Per lo stesso motivo deve stare sull'asse del segmento BC. Poi, deve anche stare sull'asse del segmento AC ... »

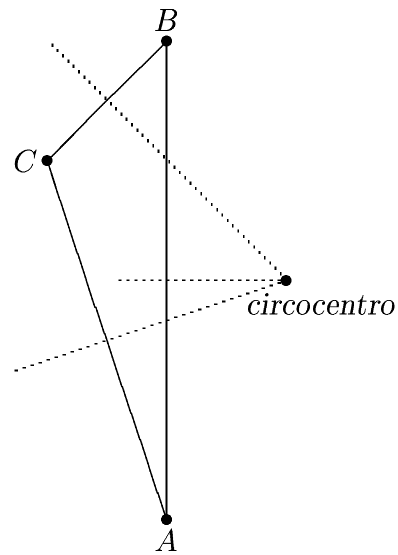
«E su quanti assi deve stare!», urla Dario. «Stai chiedendo troppe cose! Alla fine non troverai un bel niente. Dai retta a me! Questo problema è uno di quelli la cui soluzione non esiste.»

«Errato!», osserva Clara, risplendente di luce propria. «L'idea che P stia sui tre assi è azzeccata. La speranza è che tali assi si incontrino tutti e tre in un unico punto. La fortuna ci viene incontro, perchè un teorema di geometria elementare afferma appunto che, dato un qualsiasi triangolo, gli assi relativi ai suoi lati si incontrano tutti in un medesimo punto, che viene detto *circocentro*. Il circocentro è anche il centro dell'unica circonferenza passante contemporaneamente per i punti A, B e C. Sembrerebbe ragionevole dunque scegliere P come il circocentro del triangolo di vertici A, B e C. Siete d'accordo?»



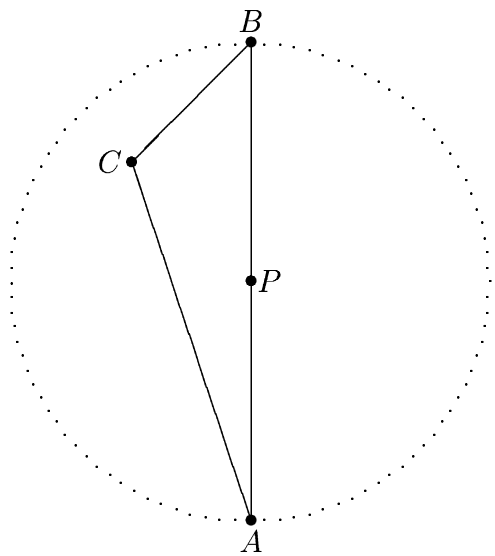
«Ssiiii!», ammettono gli altri.

«Errato!», dice ancora Clara irradiando fotoni, «provate a ragionare su un triangolo come questo:»

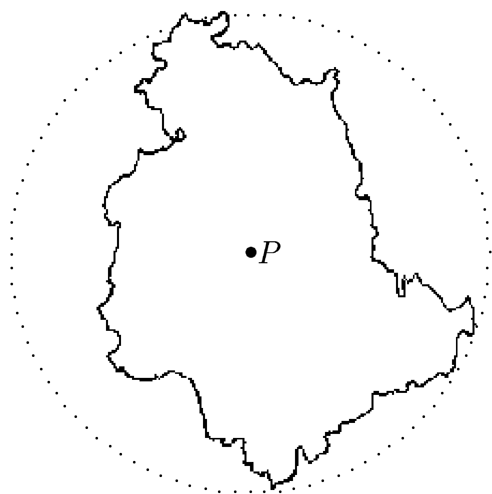


«Gli assi relativi ai lati», prosegue Clara, «si incontrano tutti e tre nel circocentro, ma quest'ultimo appare ancora lontano dai punti A, B, e C. Con un po' di buon senso, non è difficile rendersi conto che il nostro punto incognito P dovrebbe stare all'interno del triangolo, quindi, in questo caso, non deve avere niente a che fare con il circocentro.»

Preso atto dell'espressione delusa degli uditori, Clara, con infinita compassione, svela l'arcano: «La verità è che il punto P deve coincidere con il centro del più piccolo cerchio contenente i tre punti A, B e C. Nel caso in cui il circocentro cada all'interno, o sul bordo, del triangolo, allora P coincide con esso. In caso contrario, P dovrà stare altrove. Non è difficile rendersi conto che P deve allora coincidere con il punto medio del lato più lungo del triangolo. E' come se, in qualche modo, fossimo ritornati alla situazione corrispondente ai due punti A e B, essendo il terzo punto C abbastanza vicino da essere tenuto “sotto controllo”.»



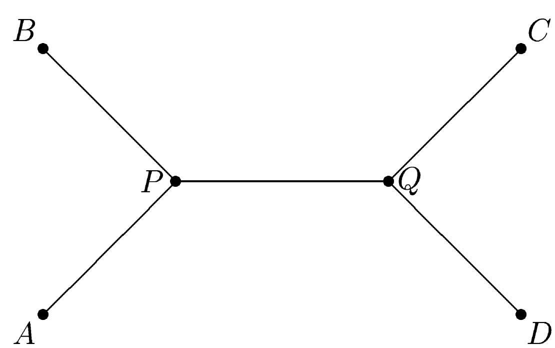
Un tonfo interrompe per una frazione di secondo l'attenzione. E' Angelo che, non riuscendo più a resitere al caldo opprimente, è rientrato, e con un agile balzo ha scavalcato il divano, atterrandovi sopra perfettamente piatto. Nello stesso istante, Meo, valutato l'imminente pericolo, schizza fulmineamente dai comodi cuscini al suo angolo preferito, dove comincia a leccarsi il pelo come se nulla fosse accaduto. Clara continua imperterrita. «Dopo queste prime considerazioni, non è difficile trovare il modo per trattare il caso in cui vengano assegnati più di tre punti, addirittura infiniti. Per esempio, questi possono essere gli infiniti punti che compongono l'Umbria. Il punto P che realizza il *mini-max*, cioè quel punto per cui risulta essere minima la distanza da esso al punto più lontano fra quelli che appartengono all'Umbria, è il centro del più piccolo cerchio contenente la regione ...



Detto punto P è evidentemente un *invariante*, non essendoci bisogno di un sistema di coordinate per definirlo. Tuttavia, in genere, non coincide con il baricentro. Inoltre, non è abbastanza rappresentativo della forma della figura, come accade invece per il baricentro. Dentro al cerchio, si può infatti sostituire all'Umbria un'altra figura, di tutt'altra forma, che lambisca la circonferenza, senza dunque alterare la posizione di P. Si badi infine che, per determinare P, occorre contemporaneamente agire sulla posizione del centro del cerchio e sul suo raggio. Tale manovra, che risulta essere già alquanto difficile dal punto di vista pratico, con l'ausilio di un compasso, lo è ancor più se si entra nell'ottica di individuare un procedimento per il calcolo esplicito di P, che sia inequivocabilmente definito e facilmente eseguibile da parte di una macchina.»

Ester ribadisce il suo concetto. «C'è il vantaggio che, partendo dal punto P, si può raggiungere qualsiasi punto dell'Umbria, ovunque esso sia, con un tragitto che è al massimo pari alla lunghezza del raggio del cerchio. E tale raggio è stato di fatto reso piccolo quanto più possibile.»

Le risponde Clara. «E' anche vero che l'Umbria non è una regione piatta e completamente desertica, nella quale i tuoi camion devono aprirsi la strada sulla sabbia, non esistendo altre vie di comunicazione. I problemi di questo genere vengono abitualmente riferiti a situazioni reali, dove la rete viaria è già interamente costituita. La posizione ideale dove stabilire la sede del punto P è quindi estremamente influenzata dai dati oggettivi. Di conseguenza, le conclusioni a cui siamo ora arrivati hanno poco valore pratico. Possono avere interesse invece quando la rete di comunicazioni non è ancora stata abbozzata, e non ci sono ostacoli di sorta. Il progettista potrebbe sicuramente essere interessato a connettere i vari posti in modo da ridurre al minimo la lunghezza globale dei collegamenti, con un conseguente risparmio sul costo delle infrastrutture. In una visione "centralizzata", cioè dove tutto fa capo ad un'unica sede di riferimento, è bene che quest'ultima occupi una posizione intermedia, e che i collegamenti fra essa e le altre sedi periferiche siano effettuati con un diagramma "a stella". In questo modo si possono attivare comunicazioni fra il centro e le estremità nel più breve tempo possibile. Se invece ciascun punto ha necessità di comunicare con tutti gli altri in modo indipendente dal centro, conviene adottare altre strategie. Per esempio, se avessimo quattro punti A, B, C e D, ai vertici di un rettangolo, potremmo congiungerli inserendo due centrali di smistamento, P e Q, scelte in modo opportuno, con il fine di minimizzare la lunghezza totale delle connessioni. Lascio a voi, come passatempo serale, il problema dell'individuazione ottimale dei punti P e Q in questione. Non preoccupatevi se non riuscirete. Non è un'impresa facile.»



«A proposito di sera», dice Ester, «comincia a farsi tardi. Bisogna che mi metta in viaggio se non voglio arrivare a notte fonda.» E rivolgendosi a Clara: «Farò tesoro di quello che ci hai raccontato. Ho imparato molte cose. Non si sa mai che mi tornino utili in futuro.»

Angelo esce dall'anonimato e comincia a dire la sua. «Quello che io invece ho imparato in questi giorni è che il centro dell'Umbria non esiste. Ciascuno ha una versione da proporre. Tutti hanno ragione. Ma questo centro non lo si trova. Una volta è qua, una volta è là. A seconda delle convenienze. Perugia va bene tanto quanto gli altri posti. E, come avevo detto io fin dall'inizio, è pure il capoluogo della regione. Intanto fuori il caldo è insopportabile; ed io ho una gran voglia di affogato all'amarena. Prima che Ester parta facciamo un salto in gelateria. Offro a tutti anche oggi.»

7

I giorni successivi non furono molto dissimili dai precedenti. Le attività motorie erano ridotte al minimo, anche in virtù del gran caldo. Quelle mentali invece fervevano, e non passava dì che non ci fosse qualche accanito dibattito su problemi scientifici. Angelo, ormai rassegnato, si accontentava di sognare lidi lontani. La sua preparazione sulla parte insulare dell'America centrale aveva ormai raggiunto livelli ragguardevoli. Egli stava incominciando ad accarezzare l'idea di emigrare in una delle isole Cayman. Il progetto era quello di gestire un'impresa turistica di pesca subacquea durante il giorno, ed un locale "alternativo" di sera.

La domenica Clara si cimentò in cucina, preparando delle indigeste cosce di tacchino in umido. Facevano da contorno alcune patate mal cotte. Il gruppo affrontò il cibo inneggiando lodi sperticate alle capacità culinarie di Clara, ma, ai primi morsi, tutti rimpiansero le penne ai quattro formaggi e le scaloppine, propinate metodicamente i restanti sei giorni della settimana. Anche Meo mostrò di non apprezzare molto la pietanza.

Di quella vacanza, a parte qualche gita fuori porta, rimasero tra i ricordi proprio i lunghi approfondimenti epistemologici, condotti intorno al tavolaccio di marmo. Particolarmente significativa fu la discussione riguardante le somme infinite di numeri, portata alla ribalta da Dario mentre a tavola, giocherellando con il coltello, frammentava un pezzo di torta in briciole sempre più piccole, che tentava successivamente di ricomporre.

Tornando a quel giorno, tutto ha inizio quando Dario, dopo sofferti ripensamenti, si rivolge a Beatrice: «Immagina quanti granellini di sabbia ci sono in una spiaggia. E immagina ancora quanti ce ne sono nel Sahara. Aggiungendo un granello dopo l'altro, armata di estrema pazienza, potrai riempire spazi indefinitamente grandi.»

«Forse un po' di logoramento, me lo consentirai a lavoro finito», commenta Beatrice sarcastica.

«Non è ammessa fine», continua Dario, con lo sguardo da drogato in *overdose*. «Pezzettino dopo pezzettino si possono comporre oggetti di enormi proporzioni, e si può proseguire rendendoli ancora più grandi. Passettino dopo passettino si può coprire qualsiasi distanza, da qui alle più lontane galassie.

Se però i granellini di sabbia dovessero divenire sempre più piccoli man mano che si procede, il discorso cambia. Allora ci si blocca. Pur continuando ad aggiungere materiale, si arriva ad un punto oltre il quale non si può andare. Come se camminando si riducesse l'ampiezza dei passi, fino a farne di piccolissimi. E' evidente che in tal caso non si riesce come prima a coprire qualsiasi distanza. Si va sempre avanti, ma si procede sempre più lentamente, cosicché è come se ci si fermasse. Vedi per esempio questa fetta di torta. Posso ridurla in frammenti sempre più piccoli. Poi li posso rimettere insieme e riottenere la fetta di partenza: infiniti pezzettini di dimensioni sempre più piccole che compongono un oggetto che è tutto qua, sul tavolo, che, quindi, non si estende a dismisura.»

Clara, che fino a quel momento aveva ascoltato in rispettoso silenzio, non si trattiene più: «Hai finito di dire sciocchezze? Sembri allucinato.»

«In effetti», aggiunge Angelo, «questa torta alle nocciole pare che dia degli strani effetti collaterali. Ho impressione che il pasticciere, noto trafficante all'improvviso sorpreso dalla polizia, abbia disciolto un carico di cocaina nell'impasto. A Dario deve essera capitata la fetta con la più alta concentrazione ... »

Lo interrompe Beatrice: «Io tenderei di più a dare la colpa alle bottiglie di costosissimo Brunello che vi siete scolati.»

«E' servito a mandar giù quel coriaceo tacchino», risponde Angelo. «E le patate soprattutto. Ad ogni modo, mi risulta che anche tu abbia abusato del vino.»

«La finite tutti quanti!», redarguisce Clara, un po' in fermento anche lei per un bicchiere di troppo, e per le irrispettose allusioni alla sua cucina. «Dario ha, come al solito, volontariamente o no, messo le basi per un'altra chiaccherata. Il suo discorso è stato piuttosto sconclusionato, forse a causa dell'alcol o della torta contenente sospetti "additivi". Comunque sia, nei suoi ragionamenti si sottointendono cose inesatte. Forse è meglio fare degli approfondimenti. Sono d'accordo con lui quando dice che, aggiungendo in continuazione certe quantità, anche molto piccole, ma tutte uguali fra loro, si possano creare oggetti di qualsivoglia dimensione. Coincide, a grandi linee, con il concetto che abbiamo dell'infinito, anche se preferirei non applicarlo in maniera così disinvolta a passeggiate in giro per l'universo, con l'intenzione di arrivare ad altre galassie. Ho delle perplessità invece sul ragionamento fatto quando si è ammesso che le piccole quantità che si sommavano potessero variare in grandezza. Nel caso in questione si è supposto che esse divenissero sempre più piccole, tendendo a scomparire del tutto.»

Dario, toccato nel vivo (con grande gioia di Angelo), riprende ad illustrare il suo pensiero: «Mi spiego meglio. Immaginate che io abbia una torta intera, bella compatta, ed un coltello affilatissimo. La divido a metà. Una delle due fette la taglio in due parti uguali e suddivido ancora una di esse in due. Proseguo senza fermarmi in questo modo. Contemporaneamente, passo le fette tagliate a Beatrice, che le rimette assieme in ordine. Beatrice, in questo modo, sta sommando infinite quantità sempre più piccole e, proprio perchè sono sempre più piccole, dovrà ad un certo punto rendersi conto che quello che sta costruendo non può avere grosse estensioni, infatti il risultato non sarà più grande della torta di partenza.»

Clara prende la parola: «Traducendo in numeri quello che hai detto, Beatrice avrebbe a disposizione all'inizio mezza torta. Poi le passeresti la metà di mezza torta, che corrisponde ad un quarto di torta. Poi la metà di un quarto, che sarebbe un ottavo di torta. Usando le frazioni, stiamo in pratica componendo la seguente addizione:

$$\mathit{Somma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

E' ragionevole supporre che il risultato finale non superi 1. Questo, non perchè gli addendi siano tutte frazioni più piccole di 1, ma perchè sappiamo che esse sono state ricavate frammentando una singola torta, ed è buona norma ipotizzare che la torta stessa non sia inferiore alla somma delle sue parti.

A dir la verità, se noi potessimo effettivamente sommare tutti gli infiniti termini, scopriremmo che *Somma* vale appunto 1. Sebbene per alcuni ciò possa sembrare evidente, quando si ha a che fare con l'infinito occorre essere cauti, per cui è bene dare una dimostrazione rigorosa. Ecco come. Possiamo ancora dividere ciascuna delle fette che compongono la somma in due parti uguali, buttandone via una. E' come dire che stiamo calcolando metà della somma, avendo gettato l'altra metà nella spazzatura. In altri termini, addizionando le fette di torta dimezzate, si ricava:

$$\textit{Mezza Somma} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots$$

Osserviamo successivamente che *Mezza Somma* non è altro che *Somma*, alla quale abbiamo tolto la prima frazione, pari a $1/2$. Ci si può dunque ricondurre alla determinazione di quel numero x, in modo che, dopo aver tolto $1/2$ da x, si abbia per risultato la metà di x. Cioè, si deve risolvere l'equazione:

$$x - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

che ha come unica soluzione: $x = 1 = \textit{Somma}$.

Naturalmente, dovremmo disporre di un tempo infinito per completare l'addizione. Essendo alquanto antipatico pensare di non doversi mai fermare, i matematici, più elegantemente, preferiscono dire che ci si può avvicinare ad 1 con un margine di errore piccolo quanto si vuole, a meno di sommare un congruo numero di addendi. Più piccolo è l'errore che si vuole commettere, più termini bisogna prendere in esame. Di tale nozione, che è quella di *limite*, ne avevamo già parlato giorni addietro.»

«E' proprio quello che stavo dicendo», esclama Dario, con la faccia del politico che, dopo un lungo sermone, cerca conferme dai suoi accoliti. «Sommando frazioni sempre più piccole alla fine si ricava un numero finito.»

«E' proprio questa l'affermazione fasulla», contesta Clara. «Mi stupisco che venga da te, che in fin dei conti hai studiato un po' di matematica all'università, prima di mollare definitivamente gli studi. Se ben ricordo, l'esame di Analisi lo avevi passato per il rotto della cuffia.»

"Ancora! Dacci dentro! Fallo nero!", pensa intanto Angelo tifando come sempre per Clara.

«Finché continui a triturare e ricomporre sempre la stessa torta, il tuo ragionamento non fa una grinza», asserisce Clara. «Supponiamo che sia io a fornirti i tagli di torta, e tu a rimetterli assieme. Io prometto di passarti delle fette sempre più piccole, ma non ti dico come le ho ottenute, né da quante torte le ho ricavate. Non importa che le fette combacino perfettamente. Quello che conta è lo spazio che occupano. Cosa pensi che succeda?»

Beatrice, esagitata, accorre in aiuto di Dario: «Lui voleva solo dire che, al "limite", e qui uso il gergo dei matematici, non potrai andare troppo lontano. Potrai arrivare a mettere insieme due, cinque, magari anche cento torte. Ma è evidente che, a causa del rimpicciolirsi delle fette, ci sarà una barriera non superabile, pur essendo infinite le fette che ti rimangono ancora da sommare.»

«Beviti un altro sorso», propone Angelo, mescendo l'ultimo goccio di vino nel bicchiere di Beatrice. A rigor di logica, gli sembrava che avessero ragione Dario e Beatrice, ma era sicuro che Clara li avrebbe presi in castagna anche questa volta.

E Clara, puntualmente, è pronta a replicare. «Ebbene», dice rivolgendosi a Dario, «proprio non ti ricordi di aver mai visto una somma del genere?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots$$

Gli addendi sono frazioni che diventano via via sempre più piccole. Viene chiamata *serie armonica*.»

«Sì mi ricordo», risponde Dario. «E mi ricordo pure che avevo fatto un programmino con la calcolatrice che sommava un numero spropositatamente grande di tali frazioni. E mi ricordo inoltre che, ad un certo punto, si otteneva un risultato i cui decimali non mutavano, neanche continuando ad aggiungere termini per ore. Segno per cui, ho dedotto di aver composto il "grosso" della somma, e che gli infiniti successivi termini non avrebbero più contribuito in maniera significativa.»

«Male! Molto male!», osserva Clara. «Meriteresti l'arresto per uso improprio di calcolatrice. Non hai pensato che, a partire da quel "certo punto", la tua macchinetta abbia solo sommato tanti zeri, invece che le tue frazioni? Per ovvi motivi, in una calcolatrice, i numeri sono rappresentati con non più di un certa quantità di cifre decimali. Le frazioni che danno luogo a molti decimali vengono "troncate", nel senso che le cifre eccedenti la capienza massima vengono escluse. Nel tuo conto, dal momento in cui il denominatore della frazione cominciava a diventare "troppo grande", la corrispondente rappresentazione decimale della frazione stessa equivaleva, dal punto di vista della macchina, ad un bel zero tondo tondo. Sono sicura che, se avessi usato un'altra calcolatrice, che utilizzava più cifre per la rappresentazione decimale, avresti trovato una somma assai diversa. Posso affermare ciò perché so che il risultato in realtà non esiste. Quella somma di infinite frazioni, sempre più piccole, non dà luogo ad alcun numero finito. E' una camminata in cui i passi si accorciano lungo la via, ma che permette di raggiungere qualsiasi destinazione, per quanto lontana essa sia.»

«Uuh!», commenta Beatrice.

«Ma dai!», protesta Dario.

«Cercherò di convincervi», dice Clara, con l'aria sconsolata di chi, controvoglia, sta per lanciarsi con un elastico legato ai piedi, in una gola a strapiombo su un torrente minaccioso. «Mettiamoci intanto da parte i primi addendi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{4621}{2520}$$

Con questi già supero abbondantemente 1. Prendiamo successivamente le frazioni con il denominatore di due cifre:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}$$

Sono novanta, e tutte sono più grandi di un centesimo. Quindi la loro somma è più grande di $90/100 = 9/10 = 0,9$. Allo stesso modo, prendiamo le frazioni con il denominatore di tre cifre:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{997} + \frac{1}{998} + \frac{1}{999}$$

Questa volta sono novecento, e tutte più grandi di un millesimo. Anche adesso la loro somma è più grande di $900/1000 = 9/10 = 0,9$. Per analoghi motivi, la somma delle frazioni con il denominatore di quattro cifre è superiore a $9000/10000 = 9/10 = 0,9$. Posso proseguire quanto mi pare, prendendo cioè la somma di frazioni con il denominatore di cinque, sei, ... centomila cifre. Spero che abbiate capito che ciascuna di queste somme parziali verrà ad essere più grande di $0,9$.

Vediamo ora di ricapitolare. Addizionando le prime frazioni, quelle con il denominatore di una cifra, arrivo con ampio margine ad 1. Posso superare $1,9$ aggiungendo le frazioni con il denominatore di due cifre. Posso superare $2,8$ mettendo anche quelle con il denominatore di tre cifre. Poi arriverò a $3,7$, a $4,6$, a $5,5$. Nessuno può fermarmi più. Con balzi lunghi $0,9$ si può coprire qualsiasi distanza. Basta aver pazienza. In ogni raggruppamento parziale ci sono sempre più frazioni, prima 8, poi 90, poi 900, 9000, 90000, eccetera; ma ne rimangono sempre infinite altre per poter proseguire. In termini matematici questo si traduce dicendo che la serie armonica è *divergente*.

Morale: si può costruire un oggetto di estensione infinita, utilizzando una sequenza di mattoncini le cui dimensioni rimpiccioliscono, diventando nulle all'infinito. Quello che conta è la rapidità con cui la grandezza dei mattoncini tende a zero. Il decadimento deve essere abbastanza lento, come nel caso della serie armonica, che, si badi bene, non è l'unico esempio di serie divergente.

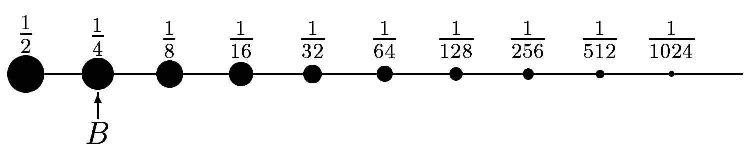
Le frazioni relative alla suddivisione della torta, cioè $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\cdots$, si riducono a zero assai più velocemente in confronto alle loro corrispondenti nelle serie armonica, cioè $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\cdots$. Difatti, la somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ dà luogo, come abbiamo visto, ad una quantità finita.

Mi auguro che la spiegazione sia stata soddisfacente. Mi sembrate un po' addormentati.»

Angelo non ha capito niente, un po' per volontaria disattenzione, un po' per gli effetti del Brunello. Ma la sua fiducia verso Clara è cieca e comincia ad applaudire con vigore.

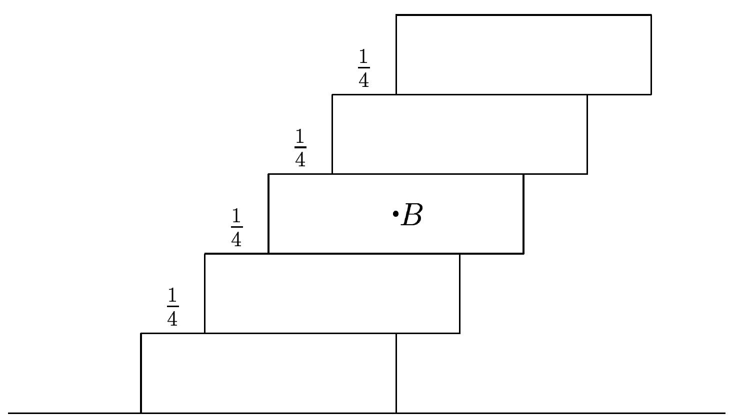
«Ci penserò sopra», dice invece Dario poco convinto. I ricordi però gli riaffiorano e rammenta molto bene ora di aver trascurato quel capitolo dell'Analisi, in favore di altri più vitali per il conseguimento dell'agognato diciotto.

Clara sa che il ferro è meglio batterlo quando è caldo, per cui insiste: «Ritornando ad un argomento che ci è stato caro in questi giorni, cioè quello del baricentro, vi voglio segnalare un caso interessante. Consideriamo un'asta di lunghezza infinita, e disponiamo infinite biglie di peso decrescente, a pari distanza l'una dall'altra. Supponiamo inoltre che i pesi siano l'uno la metà del precedente, come qui rappresentato:



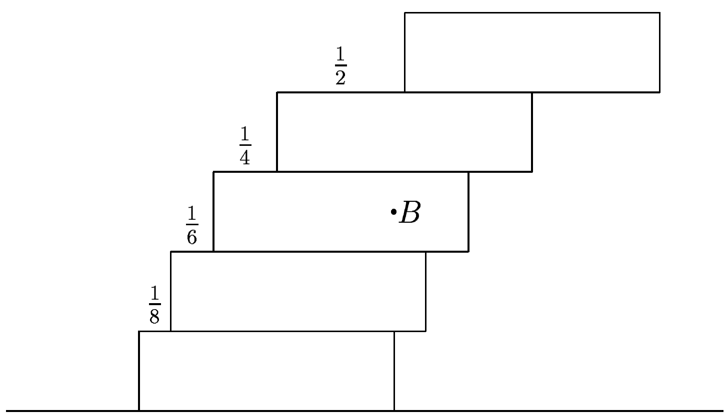
Allora il baricentro coincide con il centro della seconda biglia. Ciò significa che il *momento* relativo alla prima biglia è in grado di contrastare la somma dei *momenti* delle infinite altre biglie distribuite sulla parte destra dell'asta. In verità, il ragionamento è corretto solo se si ammette che il peso di ciascuna biglia sia tutto accumulato nel suo punto centrale.

Dovreste anche essere maturi abbastanza per apprezzare quest'altro classico esempio. Si vogliono impilare uno sull'altro cinque mattoni uguali, disposti orizzontalmente. Si vuole anche che questi siano sfalsati, di modo che quello superiore sporga il più possibile, mantenendo tuttavia l'equilibrio. La fisica ci insegna che il baricentro B deve "cadere" all'interno, o al limite, della base d'appoggio. La prima idea che viene in mente è quella di equidistribuire tutto lo spostamento orizzontale fra i vari mattoni.



Ne consegue che ciascuno si discosta dal sottostante di una quantità pari ad un quarto della lunghezza del singolo mattone. Di più non è concesso, se si desidera non compromettere l'equilibrio.

Esiste però un'altra soluzione molto elegante, che permette di rendere la sporgenza più accentuata.



Numeriamo i mattoni a partire dall'alto e sistemiamoli, facendoli scorrere l'uno sull'altro, seguendo questo ordine. Si può lasciare che il primo, quello superiore, sporga rispetto al secondo di una quantità massima pari a metà della lunghezza del mattone. Lavoriamo poi con il terzo. Esso deve stare al di sotto del baricentro relativo alla figura costituita dall'unione dei due mattoni superiori. Ciò si realizza lasciando uno scarto pari al massimo ad un quarto della lunghezza del mattone. La verifica richiede un po' di conti che qui non sto a farvi.

L'insieme dei tre mattoni è così ancora in equilibrio. Si determina successivamente la posizione del baricentro della figura costituita dall'unione di questi primi tre mattoni. Con l'esperienza acquisita in questi giorni, il compito non dovrebbe essere problematico. Il quarto mattone va perciò sistemato in modo che quest'ultimo baricentro cada all'interno della sua base. Si scopre che lo scarto massimo consentito risulta essere un sesto della lunghezza del mattone. Infine, individuato il baricentro della figura costituita dai primi quattro mattoni, si decide la posizione del quinto mattone. Lo scarto questa volta è pari ad un ottavo della lunghezza del mattone.

Sommando i contributi delle varie traslazioni si ricava una frazione più grande di uno:

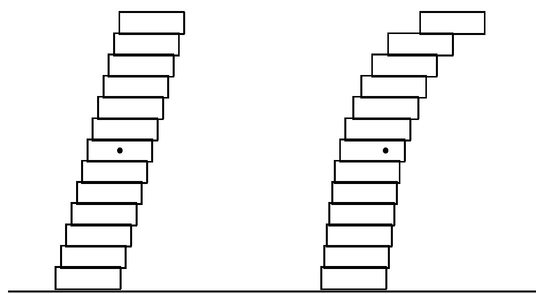
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1$$

Questo mostra che la nuova disposizione rende più sporgente la colonna.

La cosa più curiosa è che, se noi prendessimo dieci mattoni, si potrebbe fare in modo che quello superiore sia sfalsato rispetto a quello che sta alla base di una quantità pari a:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)$$

Sono sicura che Dario ha già riconosciuto in questa somma i primi termini della serie armonica. Avendo appurato che tale serie diverge, si può fare in modo, aggiungendo dal basso mattoni a volontà, che lo scarto fra il primo e l'ultimo sia grande quanto si vuole, ad esempio pari a cento volte la lunghezza di ogni singolo mattone. Notiamo invece che, imponendo che gli scarti fra un mattone e l'altro siano tutti uguali fra loro, si può solo ottenere una sporgenza globale pari ad una sola lunghezza, pena la perdita di equilibrio.»



«Niente male!», ammette Dario.

«Vorrei sottoporre alla vostra attenzione qualche altra curiosità», riprende l'instancabile Clara. «Consideriamo dunque questa addizione:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots$$

dove al denominatore troviamo $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, eccetera. Le frazioni si riducono a zero con sufficiente rapidità da dar luogo ad una serie *convergente*, cioè ad una somma finita. In genere, a parte rari casi, non si riesce a scrivere esplicitamente quanto valga la somma di una serie. Tuttavia, questo è un caso fortunato. Con tecniche raffinate si riesce infatti a stabilire che:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

dove si indica con $\pi = \textit{pi greco} = 3,141592653\cdots$, il ben noto numero che esprime il rapporto tra la lunghezza di una qualunque circonferenza e la lunghezza del suo diametro. E' strabiliante che nella somma di una serie intervenga una costante che contraddistingue il cerchio, il quale, a prima vista, sembra non essere chiamato in causa.

Insieme alle addizioni, si possono prendere in considerazione anche le sottrazioni, alternando il segno $+$ con il segno $-$. Un rimarchevole esempio, che porta ancora alla ribalta il numero π, è il seguente:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

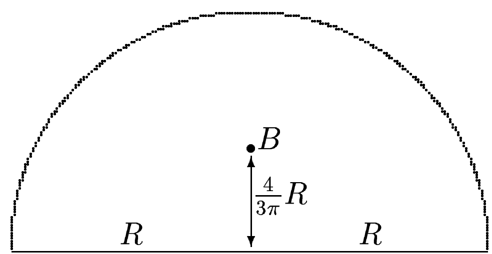
Anche i prodotti con infiniti termini sono ampiamente studiati in matematica. Si ritrova ancora la costante π nella relazione:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

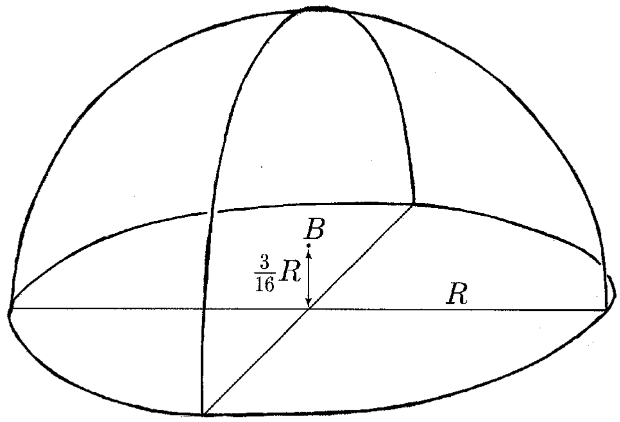
Tuttavia, non pensiate che il numero π salti fuori così spesso, essendo già fin troppo stupefacente che sia comparso inaspettatamente in questi esempi.»

«Uuh! Il ruolo di *pi greco* è davvero così rilevante? Io ho sempre pensato che servisse solo a renderci la vita più complicata a scuola», dice Beatrice.

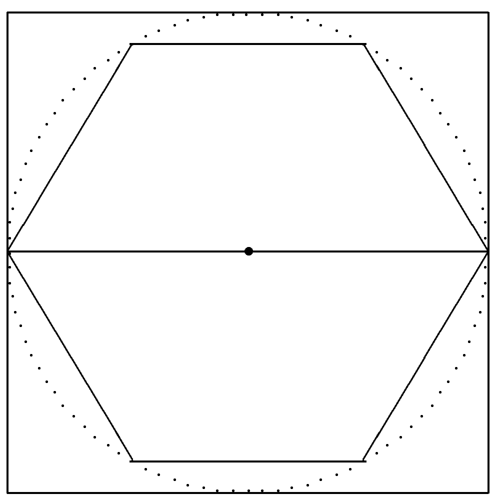
«Il cerchio, il cilindro, la sfera, sono enti geometrici che capita di incontrare di frequente anche nella vita di tutti i giorni», spiega Clara. «La costante π entra in gioco quando si calcolano aree o volumi di oggetti rotondeggianti, aventi come elemento saliente la circonferenza, o alcune sue parti. Anche nell'individuazione di alcuni baricentri ritroviamo π. Per esempio, in un semicerchio di raggio R, la distanza del baricentro B dal diametro è pari a $\frac{4}{3\pi}R$.



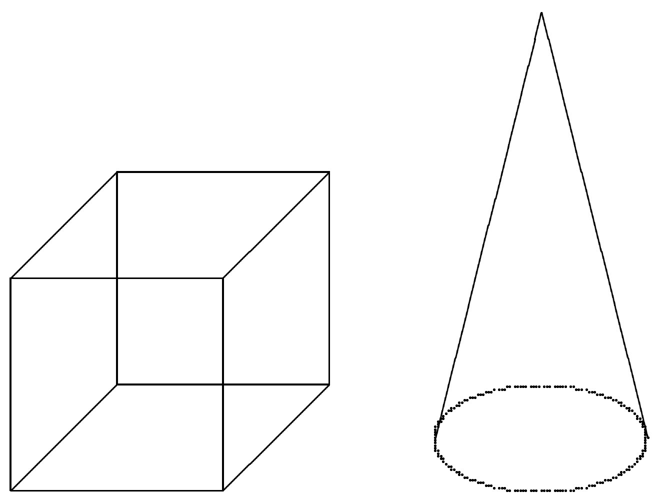
Anche se non abbiamo trattato casi specifici, è chiaro che la determinazione del baricentro ha interesse prevalente nell'ambito dei corpi *solidi*, essendo tutt'altro che inusuale il compito di trovare la posizione di equilibrio di strutture tridimensionali. A tale proposito, è curioso notare che, in una semisfera di raggio R, la distanza del baricentro B dalla parte piatta del solido misura $\frac{3}{16}R$. Pi greco, in questo caso, scompare misteriosamente.



Come abbiamo visto, ci sono mille altre occasioni, non direttamente collegate alla circonferenza, dove interviene π. Un giorno ve ne parlerò più in dettaglio. Potrete intanto mettere alla prova la vostra abilità di novelli matematici dimostrando che π è un numero compreso fra 3 e 4, partendo dalla definizione che dice che la lunghezza di una circonferenza è π volte il suo diametro. Vi sarà certamente d'aiuto il seguente disegno.»



L'euforia di Clara non si placa ed essa "sforna" altri esercizi: «Provate ad indovinare quale di questi due oggetti ha il baricentro più in basso. Il cubo con il lato pari ad un metro, o il cono con il diametro di base pari ad un metro e l'altezza pari a due metri?»



«Sono lieta», dice ancora Clara con tono di commozione, «che abbiate prestato attenzione alle mie dissertazioni.» In un eccesso di bontà, Clara, abbracciando tutti con lo sguardo, includeva nel gruppo anche Angelo, che però non dava cenni di redenzione; anzi, in quel momento, egli stava giusto pensando alla strana nausea che gli procurava la parola "baricentro", ogni volta che veniva pronunciata.

«Purtroppo», aggiunge Clara, quasi avesse letto nella mente di Angelo, «fra le persone non addette ai lavori, c'è la tendenza a non fare espliciti riferimenti a questioni inerenti alla matematica. Spesso, perfino delle velate allusioni possono suscitare insofferenza. Le prime nozioni scolastiche, se mal impartite, sono sicuramente motivo di disaffezione alla materia. In aggiunta, la facilità con cui si riesce a smascherare l'ignoranza altrui, facendo leva su sottili ragionamenti di logica elementare, fa sì che a molti convenga ritenere la matematica un tabù, a discapito di quelle piccole ed inoffensive curiosità, che rendono attraente la disciplina, e che meriterebbero una più ampia diffusione.

Mah! Si è fatto tardi. Scusate se mi sono dilungata più del solito ... Angelo ... non ci offri un gelato oggi?»

8

Il materiale fornito da Clara tenne impegnato Dario per molti mesi, dopo il suo ritorno a casa. Egli riuscì a ritrovare il testo di Analisi, sepolto fra mille scartoffie, e lo riesaminò con attenzione e rinnovato spirito. Anche Beatrice convenne che la matematica, purché affrontata nella maniera opportuna, poteva avere il suo fascino.

Angelo abbandonò i propositi di rifarsi un futuro ai Caraibi non appena riprese il lavoro. La leggenda narra che si comprò perfino qualche libriccino di divulgazione scientifica. Non si trattò di una vera conversione; era ben intenzionato a far colpo su Clara, facendole una corte serrata. Nonostante ciò, da alcune fonti confidenziali, si è recentemente appreso che, malgrado l'impegno profuso, i suoi sforzi non hanno ancora avuto il successo da lui sperato, sebbene, pare che qualche risultato parziale sia stato conseguito. Le malelingue ritengono tuttavia che sia più facile che Angelo diventi un celebre matematico, piuttosto che riesca a spuntarla con una come Clara.

Dal canto suo, Clara frequenta una nuova amicizia. Si tratta di Hans, un giovane di origine tedesca conosciuto ad una festa. Di recente, i due sono stati visti al cinema insieme. Gli indizi a disposizione sono comunque insufficienti per poter trarre delle conclusioni. Non resta che rimanere in attesa.

——◇——

Cari lettori, la storia della vacanza estiva di Clara finisce qui e non è certo di quelle che tengono con il fiato sospeso. Ci scusiamo con coloro i quali si aspettavano che Clara compisse avventure più mirabolanti. In compenso, ci auguriamo di essere riusciti a suscitare la vostra attenzione su alcuni semplici quesiti scientifici, aprendovi così la strada verso nuovi orizzonti culturali.