Disegno di Eleonora Funaro

1

Mentre il tram sferragliava in Corso Sempione, Clara si domandava perché mai Hans l'avesse convocata così urgentemente presso il suo ufficio. Frequentava Hans ormai da quasi due mesi, condividendo con lui la passione per il cinema almeno due volte alla settimana. Le era sempre sembrato che fosse un tipo flemmatico, ma al telefono aveva un innaturale tono concitato. I due si erano incontrati ad una delle rare feste a cui Clara aveva accettato di partecipare, tanto per mantenere i legami con i vecchi amici. Hans aveva subito esercitato su di lei un certo fascino, forse anche per le sue origini tedesche.

Il loro rapporto, di pura amicizia, si limitava agli incontri nelle sale cinematografiche o a qualche sortita in pizzeria.

A quell'ora il tram era pieno zeppo e non fu molto facile, tra spinte e strattoni, raggiungere l'uscita. Solitamente Clara aveva appuntamento con Hans nel suo ufficio verso la fine dell'ora di punta e, dopo un panino veloce, si rinchiudeva con lui nel solito cinema *d'essai*. Dopo la visione, seguiva il consueto dibattito, che spesso si trasformava in accese discussioni, tenendoli impegnati fino a tarda notte.

Giunta all'ingresso del condominio dove aveva sede la ditta, Clara sapeva che ora sarebbe venuta la parte più difficile: transitare a fianco della guardiola, dove il grasso e appiccicaticcio custode Franco la aspettava al varco, desideroso di scambiare quattro chiacchere per ammazzare il tempo. Infatti, eccolo là: «Signorina Clara, la aspettavo!»

«Caro signor Franco, come sta?», dice in fretta Clara sperando di sgusciare velocemente dentro l'ascensore.

«Bene, bene», risponde lui, «qualche acciacco di stagione, ma alla mia età non resta che rassegnarsi. Per fortuna che è arrivata. Avevo giusto giusto una questione da sottoporle. Sempre che lei gentilmente abbia qualche minuto da dedicarmi ...»

Qualche minuto con Franco potevano diventare ore se, ad un certo punto, non si era ben decisi a troncare la conversazione. Clara, che ormai non poteva più sottrarsi all'aggressione, era comunque dell'idea di far durare il supplizio il meno possibile. «Ma si figuri. Per lei ho sempre un po' di tempo ... mi dica!», risponde mentendo senza ritegno.

«E' sempre la stessa storia delle giocate al lotto», comincia Franco. «Come al solito, anche questa settimana ho fatto fiasco. Ma lei, lei che ha studiato, dovrebbe mettersi a scommettere. Con la sua preparazione una cinquina la becca facile facile. E possono essere migliaia di euro! Ma che dico, milioni! Cifre da capogiro! Uno veramente può rivoluzionare la sua vita. Io, ad esempio ...»

«Venga al dunque», incalza Clara spazientita.

«Ah sì! Giorni fa è uscita quella teoria di quel professore russo ... certo che i russi la sanno lunga! Specialmente quelli della Siberia. Se ne sono stati lì isolati per tanti anni ...»

«Venga al dunque», ripete Clara spazientita.

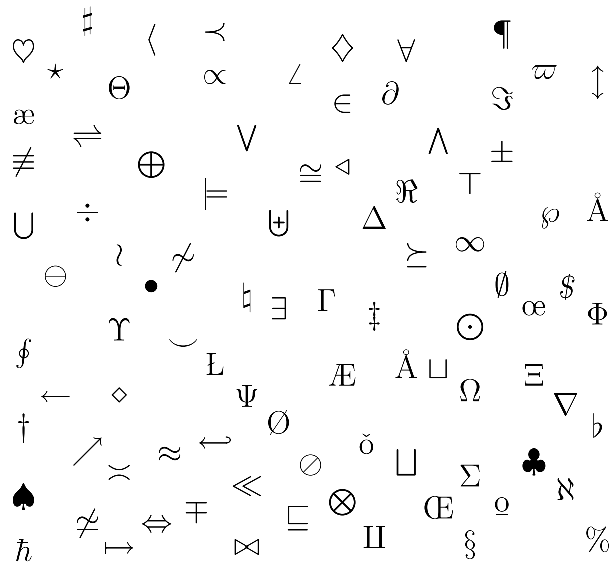
«Ebbene», dice Franco, «come lei saprà bene, quando al lotto esce un numero, diciamo il 34, è poco probabile che lo stesso numero esca anche la settimana dopo. Infatti, tutti sanno che i numeri da giocare sono invece quelli che non escono da molte settimane ...»

Clara lo interrompe: «Queste sono solo fandonie. Le ho già spiegato altre volte che, a meno che non ci siano imbrogli, il lotto è un gioco senza "memoria": le estrazioni di una certa settimana non subiscono in modo assoluto gli effetti di ciò che è accaduto le settimane precedenti. Ogni volta la situazione si riazzera, i bussolotti vengono rimessi nell'urna e, dopo un bella rimescolata, ogni traccia del passato è pressoché cancellata. Comunque continui ...»

«Secondo una vecchia teoria, che lei ben conoscerà», riprende Franco, dimostrando di aver appreso ben poco dagli insegnamenti di Clara, «se in una ruota esce ad esempio il 34, la settimana dopo, sulla stessa ruota, conviene giocare il 33 o il 35, cioè il numero che viene prima di 34 o quello che viene dopo. La teoria rivoluzionaria del professore russo dice invece che conviene assai più giocare il 32 o il 36, che non sono immediatamente a fianco di 34, ma distanziati di 2 da esso. Un'amica di mio cognato ha fatto subito l'esperimento e ha vinto. Non una grossa vincita, qualche centinaio di euro, ma sempre meglio che niente. Se lei, signorina Clara, mi conferma che il trucco funziona, io questa settimana mi gioco lo stipendio di un mese tutto intero. Eh, che ne dice?»

«Dico che non so cosa dirle», risponde Clara cercando di indietreggiare lentamente verso la porta dell'ascensore. «Se vuol giocare il 36 faccia pure. Può darsi che vinca. Ma, se ciò avviene, non è certo perché la settimana prima è uscito il 34. Non solo perché, come le ho già detto, il gioco del lotto non ha memoria, ma perché tra il 34 e il 36, sempre nel contesto del gioco del lotto, non sussiste alcuna relazione. I numeri che vengono assegnati ai bussolotti vanno intesi solo come <u>simboli</u>, senza che ciò implichi che ad essi sia stato attribuito un ordinamento.»

Clara ha nella borsetta un frammento di carta che aveva scrupolosamente preparato a casa giorni addietro, prevedendo che Franco prima o poi le avrebbe posto uno dei suoi soliti quesiti sul gioco del lotto. E' il momento di tirarlo fuori.



«Ecco qua! Novanta simbolini. Ora li mettiamo dentro a ciascun bussolotto e facciamo l'estrazione: esce $\uplus$. Che si fa la settimana dopo? Cosa si giocherà in base alla teoria del famoso professore russo? Non mi dirà che il lotto che utilizza i simboli che le ho fatto vedere è tanto diverso da quello che usa i simboli-numeri da 1 a 90? E allora? Che simbolo viene dopo $\uplus$? E quale viene prima?»

«Ma signora Clara ... lei mi mette in confusione ...», balbetta angosciato Franco. Approfittando di questo momento di debolezza, Clara si tuffa nell'ascensore e in un lampo preme il bottone del piano. «Ci vediamo!», urla mentre le porte meccaniche si chiudono.

Varcata la porta a vetri, Clara scorre davanti alla scrivania della segretaria senza neppure salutare e si infila nello studio di Hans. «Sono qua!», dice trafelata.

«Ecco te, finalmente! Ma dofe tu era kacciata?», domanda lui.

«Il tram è rimasto bloccato in un ingorgo, e poi sono stata intercettata da Franco ...», risponde lei scusandosi.

«Qvel Franco è un buon vuomo ma non bisoghna lui dare troppa retta», commenta Hans con il suo tipico accento, «Ora siede e ascolta cosa ho te da dire.»

Malgrado gli anni passati all'estero, Hans non era riuscito a migliorare di molto la conoscenza della lingua italiana. Sembrava anzi peggiorare di giorno in giorno, pur esercitandosi costantemente, sia nel mondo del lavoro che in quello sociale. A casa invece si sfogava parlando tedesco con la madre e la sorella.

Clara si mette comoda sulla poltroncina di pelle nera e comincia ad osservare il suo interlocutore con occhi languidi. Nonostante provenga da Amburgo, Hans ha ben poco dei tratti somatici di quelle parti. Basso di statura, scuro di carnagione, con occhi e capelli corvini, egli smentisce i classici luoghi comuni sulle razze.

«Buone notizie!», comincia col dire. «Come sai, io ho spezzo contacti di laforo con Ztati Uniti. Io defe andare là tra qvalche giorno e ztare fia un settimana.»

Questa non sembrava essere una buona notizia per Clara; c'erano un paio di film che avrebbe voluto vedere, oltre al fatto che l'idea che Hans sfuggisse al suo controllo, seppur per poco tempo, non la rendeva entusiasta.

«Defe incontrare in Connecticut mio socio Gary. Tu sai che lui ha moghlie italiana», prosegue Hans, «Gary è al corrente che ti sei occupata di alcune qvestioni di ghestione finanziaria per nostra ditta, e fuole conoscere te. Così lui ha detto: perché non porti lei per qvalche giorno? Io ho rizposto lui che fa bene e che pagavo a te bighlietto. Loro ci potranno ozpitare tutto il tempo. In cambio tu farai noi ancora consulenza. Cosa penzi? Si può combinare? Partiremo qvesta domenica.»

Questa sì che era proprio una bella notizia! Clara non era mai stata in America, in più la prossima settimana sarebbe stata libera da impegni, a parte quei due film ... poco importa, li avrebbe visti un'altra volta. Se si aggiunge che erano anche previsti viaggio e soggiorno gratuiti, la notizia era tra quelle da mettere in cornice. Per cui risponde, senza troppo nascondere la sua eccitazione: «Sì! Ci sto!»

E già! E Meo? Mah, del gatto si sarebbe occupata la portinaia. Un po' di dieta non poteva che fargli bene, visto che assomigliava più ad una mongolfiera che ad un felino.

«Gary abita a New Haven, un piccola cittadina, ma afremo occasione di fermarci a New York per brefe visita», aggiunge Hans. «Con noi verrà anche mia zegretaria Irene.»

L'ultima postilla, saltata fuori all'improvviso, non sembrava molto allettante. Tutt'altro! Aveva l'aria di essere una grande fregatura. Segretaria? Quale segretaria? Clara non l'aveva mai notata.

«Ma, forse non ho mai presentato te Irene. Fado a chiamare lei», dice Hans alzandosi e dirigendosi verso la porta. Poco dopo rientra con una bella bionda, procace, alta e con gli occhi verdi. Irene si presenta tendendo a Clara una mano umida e flaccida. Possibile che Clara non si fosse mai accorta di lei? Con quella minigonna! E la camicetta attillata! Da dove sbucava? Sì , aveva tutta l'aria di essere una grande fregatura.

Hans rende edotte le due su alcuni particolari riguardanti il viaggio e conclude dicendo a Clara: «Allora, restiamo d'accordo così. Ci sentiamo a telefono per discutere preparazione di bagalio.»

Mentre sul pianerottolo attende l'ascensore, Clara ondeggia con frenesia sulle gambe, non vedendo l'ora di andare a casa a controllare sull'atlante geografico dove sia esattamente New Haven. La sua abitazione, a due passi dall'ufficio di Hans, è diventata all'improvviso distante anni luce.

Durante la discesa lentissima dell'ascensore, poco prima che le porte comincino ad aprirsi, Clara viene fulminata da un'angosciante preveggenza. La profezia si avvera nel giro di alcuni secondi: il grasso e appiccicaticcio custode Franco è lì, inesorabile, in sua attesa. Per tornare a casa ci sarebbero ora voluti cinque o sei millenni.

«Ho intuito, dall'illuminarsi delle lucine dell'ascensore, che sarebbe scesa», dice Franco, interponendosi come un gigantesco macigno fra Clara e il portone d'uscita. Brandendo il foglietto datogli prima da Clara aggiunge: «Sono ancora scombussolato. Questa lista di simboli non mi convince. Vede, signorina Clara, ci sono delle combinazioni che mai nessuno giocherebbe. Ad esempio, la terna 1-2-3, non la si vede praticamente mai, per cui nessuno ci scommetterebbe sopra neanche un euro. Bhe! Se uno è così fortunato da acchiapparla può ricavarci un bel gruzzolo; ma io non mi arrischierei di certo. Preferisco andare più sul sicuro. L'amica di mio cognato ...»

«Venga al dunque», dice Clara spazientita. Intanto, una remota vocina interna le sussurra: «*New Haven, New Haven* ...»

«La domanda è questa», riprende Franco,«Qui, con tutta questa mescolanza di simboli non si capisce più dove siano l'uno, il due o il tre. Le terne sono tutte simili. Non saprei quale preferire. Come si fa a capire qual è la scelta migliore?»

«L'ha detta proprio giusta!», ribatte Clara. «Le terne sono tutte simili. Nessuna ha priorità rispetto alle altre. La probabilità che esca 1-2-3 è esattamente pari a quella di ottenere ∞-$\diamondsuit$-$\bigoplus$ oppure $\approx$-Ψ-$\in$. Non si lasci prendere dalla suggestione solo perché 1, 2 e 3 sono numeri consecutivi; non esistono numeri consecutivi al lotto, così come non esiste alcun ordine precostituito per i simboli che le ho fornito. Non si lasci gabbare dalle teorie di professori russi, cinesi o brasiliani. Non c'è modo di elaborare strategie vincenti al lotto, a meno che non si riesca a prevedere il futuro, cosa che alcuni ritengono di saper fare, se non altro per carpire denaro a qualche sventurato.»

Conclusa la frase, Clara, dopo una piccola rincorsa, appiattendosi contro il muro, supera l'intralcio. «Ci vediamo!», urla saltando i tre gradini che portano in giardino. Di corsa imbocca poi il cancello, approdando felicemente sul marciapiedi.

2

Quella domenica mattina la sveglia di Clara suona alle sei. Forte del motto “meglio essere previdenti”, alle sette Clara è già in viaggio per Malpensa, sebbene il volo sia previsto intorno a mezzogiorno. Giunta con largo anticipo all'aereoporto, si accomoda al bar, dove ha appuntamento con Hans. Quest'ultimo appare con Irene quando Clara sta terminando la sua colazione.

Senza dare cenni di stupore, lo sguardo di Clara indugia sull'impeccabile abbigliamento di Irene, la quale è truccata in maniera oltremodo provocante, come gli sguardi interessati del barista e di alcuni avventori possono testimoniare. A Clara, che si propone al pubblico con un largo maglione arancione, dei *jeans* sdruciti e delle scarpe da tennis logore, non resta che consolarsi concludendo che Irene avrebbe viaggiato "molto scomoda".

«Andiamo subito a fare *check in*», propone Hans. Mentre egli porge i biglietti all'inserviente, Clara depone il suo borsone rappezzato sul nastro trasportatore e non può fare a meno di notare le enormi e lussuose valigie che accompagnano Irene. Ma dove crede di andare? Fortuna che sarebbero stati via solo dieci giorni! Quei bagagli parevano contenere l'occorrente per un'intera sfilata di moda.

Superato il controllo doganale, il gruppetto raggiunge la porta di imbarco. «Sediamo qva», dice Hans. «Noi defe azpettare ancora tempo», aggiunge dando uno sguardo al tabellone che annuncia un ritardo della partenza di più di un'ora.

Dopo alcuni minuti passati a contemplare la pista dal finestrone, Hans riprende a parlare: «Oghni folta che prendo aereo mi domando come fa a folare. Suo peso defe ezzere imprezionante.»

«Un *Airbus 340* può arrivare a pesare più di 250 tonnellate», osserva Clara. Avrebbe voluto aggiungere che le immense valigie di Irene rappresentavano un contributo non indifferente, ma si trattiene per non alimentare inutili polemiche.

Passano alcuni minuti di imbarazzante silenzio.

«Meno di nofe ore per arrivare a New York. Miracoli di tecnologhia!», riprende Hans con l'intento di intavolare la conversazione. «E se non ci fosse aria a fare resistenzia, si potrebbe andare anche più feloci.»

Clara, che, come si sa, è particolarmente sensibile quando la discussione scivola su questioni tecnico-scientifiche, interviene subito a correggerlo: «Hai detto una grande idiozia. E' proprio l'aria che permette di sostenere l'aereo. Se questa dovesse all'improvviso mancare, il velivolo cadrebbe a picco, da gigantesca ferraglia qual è; e l'impatto al suolo produrrebbe un bel cratere. Una delle situazioni meno raccomandabili, quando si è in volo, è appunto quella di incontrare un "vuoto d'aria". Anche se alla quota di 8.000-9.000 metri l'atmosfera è piuttosto rarefatta, un velivolo civile, muovendosi ad una velocità di poco inferiore a 1.000 chilometri orari, incontra moltissima "resistenza", parte della quale viene appunto sfruttata per mantenere la quota di volo.»

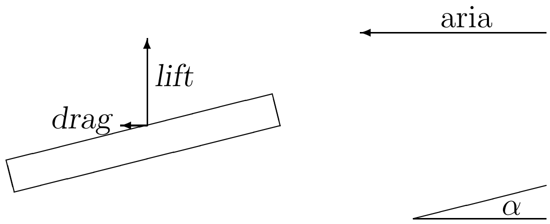
«Mmmh!», mugugna Hans scettico, sapendo così di stimolare ulteriormente Clara al colloquio.

Il breve muggito è infatti sufficiente a rimettere in moto la lingua instancabile di Clara: «Correndo in autostrada, hai mai tenuto la mano fuori dal finestrino? Mantenendo la mano piatta e orizzontale con le dita controvento, si riesce a fendere l'aria senza troppa resistenza. Ma, appena si tenta di inclinare anche di poco la mano, sollevando il palmo nella direzione del moto, questa tende subito a sollevarsi e, contemporaneamente, il braccio viene trasportato all'indietro. Queste due forze che agiscono sulla mano sono rispettivamente chiamate *lift* e *drag*. La sensazione è tanto più forte quanto più alta è la velocità dell'auto e quanto più viene inclinata la mano.

Le ali di un aereo sono leggermente inclinate, in modo che nella parte inferiore l'aria in arrivo si comprima. Sulla parte superiore l'aria tende invece a rarefarsi. La differenza di pressione tra la superficie inferiore e quella superiore genera una spinta, la cui componente nella direzione verticale prende il nome di *lift*. Quando il *lift* è così grande da superare il peso del velivolo, quest'ultimo si solleva. All'altitudine di crociera il *lift* è tale da compensare esattamente il peso, in modo da mantenere la quota costante. Contemporaneamente, sempre a causa della spinta dovuta alla differenza di pressione sulle superfici dell'ala, viene generato il *drag*, che si oppone al movimento in avanti, riducendo la velocità dell'aereo e, di conseguenza, abbassando il *lift*. Si tratta dunque di creare una situazione di equilibrio: i reattori dell'aereo devono essere così potenti da permettere alle ali di produrre *lift* a sufficienza per poterlo innalzare; nel contempo, devono vincere abbondantemente il *drag*, garantendo un'adeguata velocità di regime. Come avevi intuito prima, in assenza di aria viene a mancare il *drag*; purtroppo viene inevitabilmente a mancare anche il *lift* e l'aereo è destinato ad una brutta fine.»

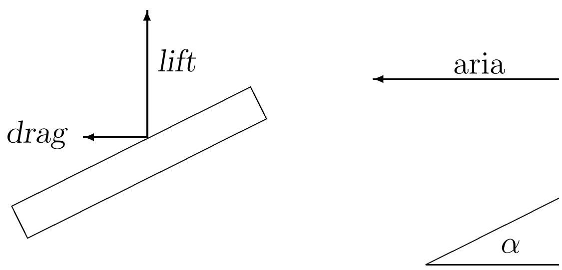
Hans non ha dubbi sulla correttezza di ciò che ha detto Clara. Tuttavia, dovendo passare in uno stretto sedile a fianco a lei ancora molte ore, preferisce farla "sfogare" subito. Per ottenere l'effetto desiderato si limita a muggire con tono scettico: «Mmmh!»

Clara raccoglie la sfida e sfodera un blocco per gli appunti e una matita dal piccolo e compresso bagaglio a mano, che ha l'aria di avere una capienza pari a quella della borsa di *Mary Poppins*. «Vedi», dice, «schematicamente la sezione di un'ala appare così:



Senza che ciò alteri la natura del fenomeno, è prassi supporre che sia l'aria ad essere in movimento nel verso contrario. E' la stessa situazione che si genera in un *tunnel del vento*, dove una forte corrente d'aria viene inviata contro un modellino fissato all'interno della *camera*. Questo spiega anche perché è meglio che il decollo di un velivolo debba avvenire controvento, onde sfruttare una piccola componente di *lift* gratuito. Anche l'atterraggio deve essere effettuato controvento in modo che l'aereo possa mantenere una bassa velocità rispetto al suolo, ed essere comunque sostenuto dall'aria.

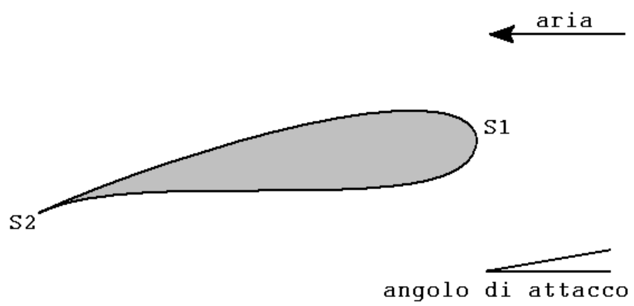
L'angolo α che l'ala forma con la direzione orizzontale viene detto *angolo di attacco*. A pari velocità, incrementando tale angolo, si aumentano sia *lift* che *drag*.



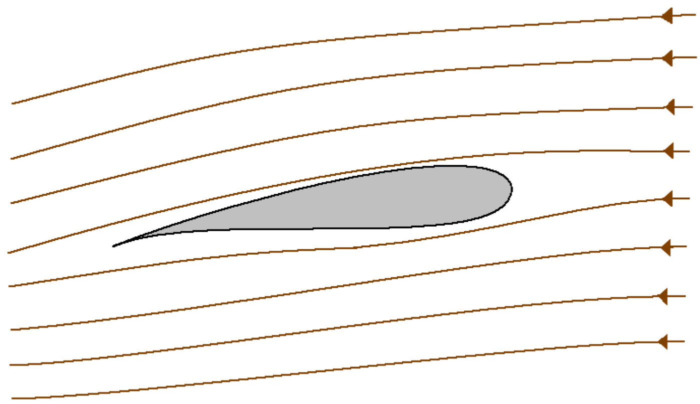
Ad alta quota basta un piccolo angolo di attacco per assicurare il necessario *lift*. Nella delicata fase di decollo, quando la velocità dell'aereo è ancora bassa, occorre mantenere invece un angolo di attacco alto. Bisogna stare molto attenti a non incrementare troppo l'angolo di attacco per non avere lo sgradevolissimo effetto dello *stallo*. Se infatti l'ala è troppo inclinata, l'aria intorno ad essa si comporta in modo molto "scoordinato", non esercitando più la dovuta forza ascensionale; il *drag* diventa molto grande ed il *lift* cessa di esistere con conseguenze catastrofiche. Questa situazione deve essere evitata ad ogni costo per non rischiare di perdere del tutto il controllo del mezzo.»

«Ma come fai a conoscere tutte qveste coze?», domanda Hans stupito. Dopodichè, accattivato dall'argomento aggiunge: «Bisoghnerebbe diseghniare ala in modo che *lift* sia alto e *drag* basso ...»

«E' proprio quello che le industrie areonautiche cercano di fare», risponde Clara. «Il profilo di un'ala è diverso a seconda che si guardi la parte superiore o quella inferiore.



Vista in sezione, l'ala presenta due punti di *stagnazione* S_1 e S_2. Le molecole che compongono l'aria, arrivate di fronte all'ostacolo, si separano in prossimità di S_1 e si ritrovano in S_2. Grazie alla particolare geometria, la velocità delle molecole è un po' più bassa nella parte inferiore dell'ala. Ciò contribuisce, in virtù di note proprietà fisiche, ad enfatizzare la differenza di pressione fra le due parti. L'andamento delle molecole può essere rappresentato tramite le *linee di flusso* nel seguente modo.



Tale comportamento può essere messo in risalto da fotografie prese nel tunnel del vento, illuminando i tracciati originanti da piccole sorgenti fumogene poste davanti al modello dell'ala. In questo modo, sperimentando diverse configurazioni, per una data velocità ed un assegnato angolo di attacco, si cerca di stabilire quale sia la forma ideale di un'ala. Molti aerei, specialmente quelli militari, hanno addirittura la possibilità di correggere in volo la forma delle ali, adattandole a seconda delle circostanze. Quasi tutti gli aerei possono, orientando la parte posteriore delle ali verso il basso, mantenere il *lift* e aumentare di molto il *drag* ...»

«Qvesto poco conveniente!», osserva Hans interrompendo Clara.

«Ciò è utile quando si atterra», prosegue lei senza battere ciglio. «Durante la fase di atterraggio avrai modo di verificare personalmente, guardando fuori dal finestrino, come il pilota, agendo su comandi idraulici, sia in grado di apportare modifiche sostanziali alla geometria delle ali, potendo rallentare il velivolo senza che a questo venga a mancare la giusta dose di *lift*, in maniera da garantire così una discesa morbida.»

«Credo che sia arrivata ora di imbarcarsi», dice Hans, notando del movimento dalle parti dell'uscita. Si alza e, seguito da Clara, si avvia verso la porta. Subito dopo, Irene, che ha passato tutto il tempo a rifarsi il trucco con certosina pazienza, li raggiunge ancheggiando in equilibrio precario sui lunghi tacchi.

3

Dopo aver trafficato a lungo per sistemare bagagli e cappotti negli appositi vani, Hans prende posto fra le due donne. Non riuscendo a sfogliare il giornale nello spazio angusto assegnatogli, riprende la conversazione precedentemente interrotta. «Prima non hai rizposto mia domanda. Come sai tutte qveste cose su *lift*, *drag*, ezzetera?», chiede mentre l'aereo rulla lentamente verso la pista di decollo.

«Anni fa avevo un amico che lavorava come pilota civile, dal quale ho appreso molte nozioni», confessa

Clara sottovoce, come se nascondesse chissà quali segreti. «Inoltre, ciò fa parte del mio bagaglio di conoscenze nel campo della matematica.»

«Matematica? Qveste sono nozioni di ingheniere», dice Hans compresso sul suo sedile durante la fase di accelerazione prima del decollo. Avrebbe potuto valere la pena di fare qualche indagine supplettiva su quel fantomatico pilota, ma Clara tendeva sempre a mantenere il più stretto riserbo riguardo ai suoi amanti, o presunti tali. No, non se ne sarebbe cavato un ragno dal buco.

«Non vedo linea di demarcazione fra la matematica applicata e le altre discipline scientifiche», sintetizza schiettamente Clara. «Nel caso specifico, la modellistica matematica permette di fornire un'alternativa alla sperimentazione, spesso troppo costosa o del tutto irrealizzabile, condotta con palliativi in scala dentro i tunnel del vento. Si descrive infatti il fenomeno fisico, inerente al moto di un fluido intorno ad un generico ostacolo solido, mediante complesse equazioni, che vengono poi risolte con l'ausilio di potenti macchine di calcolo opportunamente programmate. In molte circostanze questo approccio si rivela meno oneroso e più flessibile di quello classico, specialmente se si intendono realizzare grandi progetti, quale ad esempio quello inerente al rientro nell'atmosfera di un veicolo spaziale.»

«Non riesco a immaghinare come si può zcrivere eqvazioni di movimento di aria», osserva perplesso Hans. «E poi partichelle di aria sono tante. Come si fa seguire tutte?»

Clara lancia una rapida occhiata alla cima del Cervino in avvicinamento e un'occhiata altrettanto rapida ad Irene, intenta ad affilare con precisione micrometrica le sue unghie con una limetta. Poi riprende la spiegazione: «L'idea di poter controllare l'andamento di ogni singola molecola che compone l'aria è piuttosto folle. Grazie ad una ipotesi formulata da Avogadro si può stabilire che la quantità media di molecole in un cubetto del lato di un centimetro, a zero gradi centigradi, e alla pressione di un'atmosfera, cioè quella che si ha in genere al livello del mare, è un numero gigantesco. Esso vale:

$$2.690.000.000.000.000.000$$

Se dovessimo cominciare a contare da 1, scandendo i numeri ogni secondo, ci vorrebbero più di cento miliardi di anni prima di arrivare a tal numero. Tenuto conto che si stima che i primi esseri monocellulari siano comparsi sulla terra "solo" qualche miliardo di anni orsono, non avremmo ancora terminato il conteggio neanche se questo avesse avuto inizio quando i nostri antenati erano dei protozoi. Pensa inoltre a quanto è piccolo un centimetro cubo; meno di una zolletta di zucchero.

Ad alta quota la pressione dell'aria è inferiore di quella a livello del mare, e quindi il numero di molecole diminuisce; tuttavia, quelle che vengono influenzate dal movimento dell'aereo rimangono comunque così tante da superare ogni immaginazione. D'altronde non ha senso conoscere alla perfezione la posizione ad ogni istante di ogni singola particella, essendo sufficiente avere indicazioni sul loro comportamento attraverso indagini di tipo statistico.»

«Coza fai? Dai modulo da compilare ad oghni molecola? Italiani zempre amanti burocrazia», interrompe Hans ridendo come uno scemo.

«Ma no!», commenta Clara, facendo cenno di strozzarlo con le mani. «Devi trovare delle regole di validità generale che esulano dai comportamenti particolari. Semplificando di parecchio il problema, si potrebbe fare un parallelo con il gioco della *roulette*. Supponi di essere un accanito giocatore e di puntare costantemente sul numero 32. Nessun teorema è in grado di stabilire cosa accadrà ad ogni giocata: il 32 potrebbe non uscire per parecchio tempo o venir fuori inaspettatamente per tre volte di fila. Tuttavia, una regola matematica si può comunque trovare. Essa dice che "in media" il 32 compare ogni 37 giocate, pari alla quantità di simboli segnati sulla ruota, corrispondenti ai numeri che vanno da 0 a 36. Questa affermazione è da interpretarsi nel seguente modo: nel lungo periodo, la frazione che si ottiene dividendo il numero di giocate per il numero di volte in cui è sortito il 32, si avvicina a 37, e tale stima è tanto più veritiera quanto è più lungo il periodo di osservazione. Più correttamente, 37 è il *limite* della suddetta frazione quando il numero di giocate tende all'infinito. Quando sei fortunato, il *casinò* ti restituisce la somma che hai puntato sul 32 moltiplicata per 36. E' ovvio che, a lungo andare, sarai in perdita, perché dovrai puntare mediamente 37 volte la posta per avere indietro la stessa moltiplicata per 36. Non è consentito però dedurre alcun comportamento particolare: in *media* il 32 esce ogni 37 volte, ma non ci si può aspettare che questa regola venga sistematicamente rispettata; come ho detto prima, ci possono essere lunghissimi periodi in cui il 32 non si fa vedere, alternati da improvvise concentrazioni, che alcuni potrebbero considerare sospette, ma che sono perfettamente lecite, sempre che la *roulette* non sia truccata. Il *casinò* basa la sua fortuna sul fatto che, su un quantitativo astronomico di giocate, rimborsa solo i $\frac{36}{37}$ di quello che è stato investito dai giocatori, i quali invece sono invogliati a rischiare proprio in virtù dell'incertezza e dal miraggio di lauti guadagni. A stimolare il desiderio di tentare la sorte concorre l'esempio di chi vince quasi sempre. D'altra parte, a costui va abbinato il caso di colui il quale, al fine di alimentare la "passione" per il gioco, è costretto ad impegnare i gioielli di famiglia o ad ipotecare la casa. In definitiva, ogni "evento" è a se stante, ma un'enorme quantità di essi può permettere di stilare regole precise, che sono poi quelle che giustificano l'apertura di una casa da gioco e i grossi profitti che ne derivano.

Lo stesso vale per le particelle d'aria in movimento. Ci potrebbero essere decine di miliardi di esse che vanno "controcorrente", non uniformandosi al comportamento generale del flusso d'aria. Sarebbero comunque un numero trascurabile. Quello che conta alla fine è avere valutazioni sommarie su certe quantità fisiche, e poco importa sapere cosa stia accadendo nei minimi dettagli.

Discorso analogo potrebbe valere per problemi di *marketing*, nei quali l'investitore vorrebbe conoscere mediamente se ha possibilità di guadagnare, senza porsi domande su cosa faranno specificatamente Tizio, Caio o Sempronio.»

«Chiaro, sì! Ma come si fa a scrivere eqvazioni?», chiede ancora Hans.

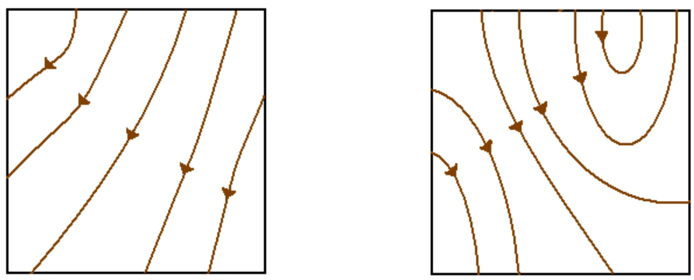
Una breve pausa per ammirare la città di Lione, 9000 metri più sotto, e Clara ricomincia a parlare: «Non è una cosa facile da spiegare, perché presume conoscenze di fisica e matematica a livello superiore, che solo una buona preparazione universitaria permette di ottenere. Cercherò di darti qualche idea. Come in tutte le *leggi del moto*, l'ingrediente fondamentale è la famosa relazione che lega forza e accelerazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

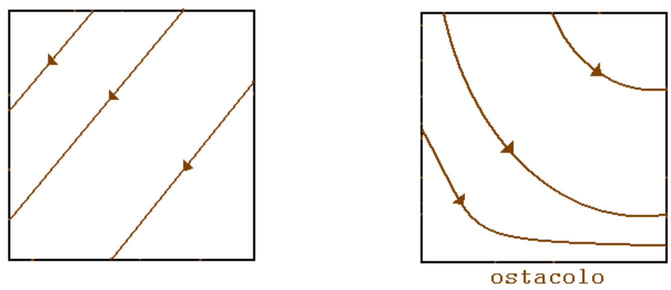
dovuta a Newton. Questo vuol dire che applicando una forza $\vec{F}$ al baricentro di un oggetto rigido con massa m, gli si imprime un aumento di velocità di $\vec{a}$ metri al secondo per ogni secondo in cui agisce $\vec{F}$. Con il simbolo $\rightarrow$ si indica che l'accelerazione avviene nella stessa direzione in cui agisce la forza. Se ne deduce che, a parità di forza, l'accelerazione è tanto più grande quanto è più piccola la massa, e viceversa. L'applicabilità della formula di Newton va ben oltre il semplice esempio dell'oggetto solido sospinto. Essa è alla base delle leggi che regolano la dinamica dei corpi in movimento, inclusi i fluidi, i quali sono tutt'altro che oggetti rigidi.

Come prima operazione, si può pensare di scomporre il volume occupato dall'aria in piccole parti, ad esempio dei cubettini, eventualmente deformati per seguire il contorno dell'ala. I cubettini devono essere abbastanza piccoli in modo che le molecole all'interno di ciascuno di essi, pur essendo ancora un numero enorme, si muovano in modo relativamente coerente e prevedibile. In questa semplificazione, non sempre lecita, si assume quindi che il moto dell'aria intorno all'ostacolo rappresentato dall'ala non sia troppo complicato.»

Con uno schizzo sul solito blocco per gli appunti, Clara disegna le sezioni di due cubettini, la prima che riflette, a suo dire, una situazione di flusso "regolare", e la seconda di tipo leggermente più complesso.

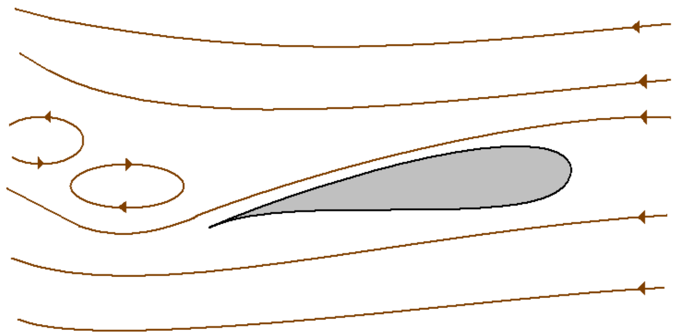


«Per fare un esempio», continua Clara, «è un po' la differenza che intercorre, in un grande formicaio, tra una normale fase di attività di procacciamento delle scorte e la fase di apparente disorganizzazione che viene a crearsi quando si molestano le formiche con un rametto. Supponendo dunque di essere nel primo caso, all'interno di ogni cubettino, le molecole, in gran parte, cioè tranne un numero trascurabile di esse, si muovono in "formazione compatta" e hanno un comportamento medio facilmente descrivibile tramite equazioni. Ogni cubetto, attraverso il flusso d'aria che entra ed esce da esso, riceve e porta informazioni ai cubetti adiacenti. Il contributo di tutti permette la ricostruzione dell'intero fenomeno. Un'analisi più accurata porta a distinguere tra la situazione in cui il cubetto si trova molto lontano dall'ala e quella in cui si trova in prossimità di essa.

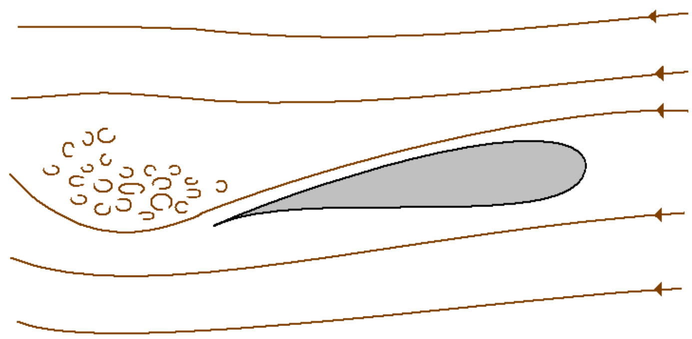


Se si è molto lontani dall'ostacolo e il cubetto è molto piccolo, le traiettorie delle molecole appaiono pressochè rettilinee. Se si è invece a ridosso dell'ostacolo avvengono i fenomeni più interessanti che si ripercuotono poi, con effetti più o meno marcati, sull'intero sistema di cubetti. Si può fare un primo paragone con un'autostrada trafficata quando, a causa della chiusura di una corsia, si viene a formare un collo di bottiglia, responsabile di rallentamenti. Ogni auto frenando, avverte l'auto seguente. Malgrado il traffico continui a fluire senza sosta in avanti, l'informazione si propaga in senso opposto tanto più lontano quanto è più grave l'entità dell'ostruzione. Analogamente, le particelle d'aria di fronte all'ostacolo, non potendo sparire nel nulla, principio pure espresso da note leggi fisiche, deviano e comunicano all'indietro, respingendosi a vicenda, ciò che sta per accadere. Nel caso delle auto, la loro distanza reciproca si riduce, anzi si "comprime", per usare lo stesso termine adottato in fluidodinamica. Il comportamento è differente nel caso di un fiume che all'improvviso trova una strettoia. L'acqua è molto poco "comprimibile" in questa circostanza e quello che si osserva, oltre ad un leggero rallentamento globale di tutto il fiume, è un aumento di velocità nel tratto stretto, le cosiddette rapide. L'aria manifesta un po' tutte queste caratteristiche, più o meno marcatamente a seconda delle circostanze, e ciò dipende dalla sua densità, dalla temperatura, dalla velocità con cui si muove, dalla grandezza degli oggetti in gioco. Il tutto è opportunamente quantificabile e permette di arrivare ad enunciare le equazioni finali.

Le stesse equazioni vanno riviste e migliorate se si vogliono "modellizzare" fenomeni più complessi quali il moto "turbolento". Sempre facendo riferimento all'ala, aumentando la velocità o l'angolo di attacco si può osservare la comparsa di *vortici* e *controvortici*.

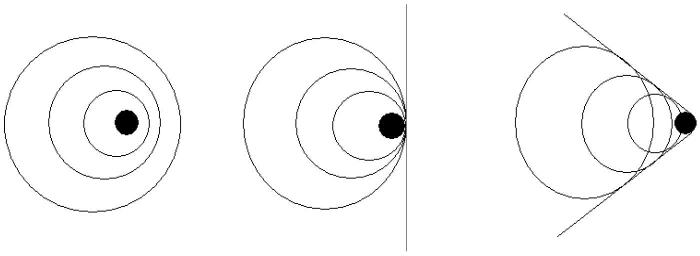


L'energia che viene spesa per mantenere questo moto circolatorio, indesiderato ma inevitabile, va a scapito delle prestazioni dell'aereo. I vortici hanno perciò una certa influenza sul *drag*, il *lift* e, in generale, su tutto l'assetto di volo, per cui è conveniente che il modello teorico riesca a "riprodurli", in modo che, in una fase successiva, si possa intervenire sulla forma dell'ala per limitare gli effetti negativi. Per velocità ancora più alte si può creare una vasta zona dietro l'ala dove le molecole si rimescolano rapidamente in stato di quasi completa anarchia, dando luogo a quello che, in taluni casi, viene definito comportamento caotico. In questa zona si possono solo fare rilevazioni di tipo statistico, che il modello matematico dovrebbe comunque tenere in considerazione.



Un altro aspetto da non sottovalutare concerne il superamento della *barriera del suono*. Come saprai, le vibrazioni sonore, sono rarefazioni e compressioni che si propagano nell'aria. Opportunamente intercettate dal nostro timpano, giungono al nostro cervello come rumori più o meno gradevoli. Nell'aria, la velocità di propagazione di queste onde si aggira intorno ad un migliaio di chilometri orari. Quando un *jet* supersonico supera tale velocità, il suo proprio rumore viene paradossalmente "catturato" prima che riesca a propagarsi in avanti.

Ecco qua! Nel primo caso ho disegnato le onde sonore che si propagano quando il velivolo ha velocità *subsonica*; assomigliano a quelle che si creano sulla superficie di uno stagno dopo il lancio di un sasso. Nel secondo caso il velivolo ha una velocità pari a quella del suono. Non c'è propagazione di segnale in avanti e la figura ricorda un oggetto che si schianta contro un muro.



Nel terzo caso, corrispondente a velocità supersoniche, il velivolo si trascina dietro una zona, di forma conica, di forte demarcazione tra aria in quiete e aria in movimento, che è analoga alla scia prodotta nell'acqua dalle navi. Inevitabilmente, quest'ultima condizione porta ad ulteriori complicazioni nello studio del fenomeno.»

«Sì! Ma come si zcrive eqvazioni?», domanda ancora una volta Hans, per nulla annoiato dalla lunga dissertazione.

«E' troppo complicato. Ti prometto che prima della fine di questo viaggio avrai almeno una parziale risposta. Ora fammi gustare il pranzo», taglia corto Clara, concentrando lo sguardo affamato sul carrello delle vivande che avanza.

«*Chicken or veal?*», domanda l'*hostess* con fare fin troppo gentile.

4

Il film proiettato a bordo è un intricato polpettone riguardante le peripezie di una bella e giovane giornalista alle prese con un *clan* mafioso, interessato a mettere le "grinfie" su un potente *microchip*. La pellicola, già vista e commentata da Clara e Hans, era stata a suo tempo criticata aspramente, riconoscendo che l'unica attrattiva era da attribuirsi alla bellezza della giornalista. Al termine dello spettacolo non segue dunque un ulteriore dibattito e l'attenzione viene invece rivolta alle magnifiche e lontane coste della Groenlandia apparse inaspettatamente ai finestrini. Con un'ampia virata, l'aereo riallinea la propria rotta puntando verso l'isola di Terranova.

«Aereo, come bicicletta, si inclina per ghirare», osserva Hans con saggezza. Dopodichè si mette a sghignazzare ... certe volte sembra proprio un idiota!

«Bravo!», gli fa eco Clara, aggiungendo: «E scommetto che, come molti, pensi che basti inclinarsi su un fianco per ottenere l'effetto virata.»

«Certamente! Ma io conosce te. Tu sta cercando di dire me che sbaghlio.», risponde Hans, consapevole di aver svegliato un mastino dormiente. Un nuovo dibattito stava per delinearsi all'orizzonte. Tanto avrebbero comunque discusso del film, se solo non lo avessero già visto. Nel frattempo Irene, con l'abito ancora in perfetto ordine, comincia a ritoccarsi le ciglia con l'aiuto di un complesso armamentario, facente parte della ricca dotazione del suo *beauty case*.

«Stando sollevato dal sellino puoi procedere diritto in bicicletta pur tenendola inclinata da una parte. Ragion per cui non basta inclinarla per cambiare direzione», osserva Clara.

«No, sicuro! Devi ghirare manubrio», dice Hans.

«In teoria il solo manubrio non basta. Se fossi a bordo di una bicicletta lanciata su una lastra di ghiaccio, potresti girare a piacere il manubrio senza riuscire ad alterare la direzione. Probabilmente ci ricaveresti un bel capitombolo e continueresti a proseguire strisciando sul sedere, sempre nella stessa direzione. Per ottenere il risultato desiderato devi combinare vari elementi: la rotazione del manubrio, l'inclinazione da una parte, l'attrito dell'asfalto. La pressione asimmetrica contro la ruota dà in tal modo origine alla spinta laterale necessaria al cambiamento di direzione », spiega Clara.

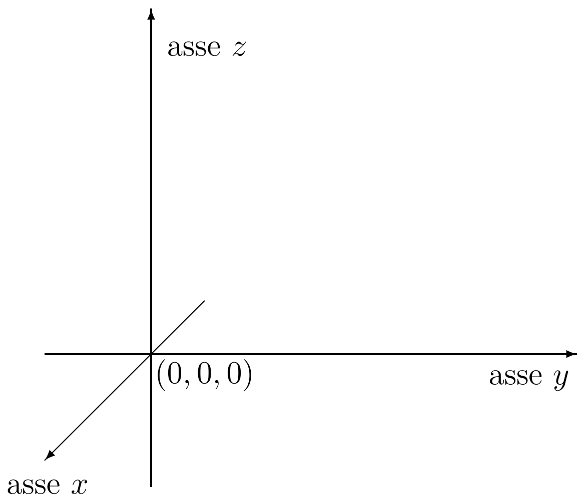
«Aereoplano non ha manubrio!», esclama Hans.

«Sì che lo ha!», ribatte Clara. «Si chiama timone, ed è situato in coda. Non è solo un *optional*, ma un costituente fondamentale per il controllo del volo. In una virata, il pilota regola la rotazione lungo l'asse verticale mediante il timone. Contemporaneamente, mediante un movimento contrapposto degli *alettoni*, abbina una rotazione lungo l'asse orizzontale nella direzione del moto, abbassando un'ala e sollevando l'altra. Questo consente di generare dell'ulteriore piccolo *drag* asimmetrico, utile a fornire la forza laterale che ruota il velivolo. E non è tutto! L'energia spesa per la virata porta ad un leggero calo di altitudine che può venire compensato, durante la virata stessa, aumentando leggermente l'angolo di attacco; applicando cioè una terza rotazione lungo l'asse parallelo alle due ali. Tre rotazioni abilmente dosate che portano ad un'unica rotazione finale.»

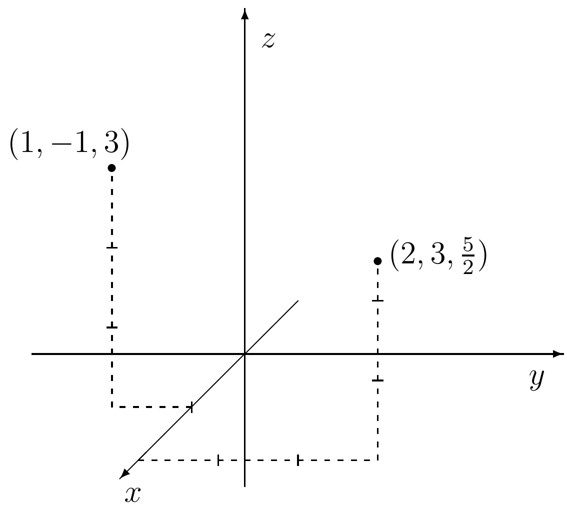
«Zcommetto hai teoria matematica anche per qvesto. Tu vede matematica in per tutto», commenta Hans, la cui conoscenza della lingua italiana peggiora di minuto in minuto.

Clara non si lascia pregare due volte e inizia una nuova lezione. «Visto che abbiamo ancora qualche ora prima di giungere a destinazione, potrei introdurti al calcolo con *matrici*, mediante il quale si riesce a descrivere una vasta classe di *trasformazioni* dello spazio tridimensionale in se stesso, quali ad esempio le rotazioni.

Come ben saprai, la posizione di un punto nello spazio può essere individuata attraverso una terna di numeri: le sue coordinate. Per definire un sistema di coordinate, occorre stabilire la cosiddetta *origine*, corrispondente alla terna $(0, 0, 0)$, e collocare i tre *assi* di riferimento, perpendicolari fra loro e chiamati nell'ordine con le lettere x, y e z», spiega Clara disegnando.



«Si determina poi l'unità di misura. In questo modo si stabilisce una corrispondenza univoca tra le terne di numeri e i punti dello spazio. Eccoti un paio di esempi:



Come vedi i numeri non debbono essere necessariamente interi e possono essere anche negativi.

Una *matrice* è caratterizzata invece da nove numeri. Questo ne è un esempio:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ \pi & \frac{3}{2} & 5 \\ -15 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Essa non è solo una "tabella". Nel nostro caso è un *operatore*, cioè un marchingegno che trasforma le tre coordinate di un punto dello spazio in altre tre coordinate, operando dunque una modificazione dello spazio. Vediamo subito come.

La *moltiplicazione* di una matrice per una terna di numeri (x, y, z), si effettua nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ \pi & \frac{3}{2} & 5 \\ -15 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 4z \\ \pi x + \frac{3}{2}y + 5z \\ -15x + \sqrt{2}y + z \end{pmatrix}$$

La regola del gioco è questa: si prende la prima *riga* della matrice e si esegue la somma dei prodotti tra il primo numero della riga per x, il secondo per y, ed il terzo per z. Si fa lo stesso con la seconda e la terza riga. Si ricava dunque un'altra terna di numeri che rappresentano le nuove coordinate del punto (x, y, z), dopo aver eseguito la trasformazione. Per fare un esempio concreto, se (x, y, z) è il punto di coordinate $(0, -2, 1)$, la moltiplicazione fornisce:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ \pi & \frac{3}{2} & 5 \\ -15 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Questo vuol dire che $(0, -2, 1)$ è stato trasformato nel punto $(-4, 2, -2\sqrt{2} + 1)$.

«Perché fai multiplikation in qvesto modo? Non zi può infentare altre regole?», domanda Hans.

«Le regole del gioco non si discutono, così come sono state fissate una volta per tutte quelle del *Monopoli* o degli scacchi», dice Clara sollevando l'indice della mano destra. «Se vuoi avere riscontri con la realtà, questo, come presto vedrai, è il modo giusto di operare. Puoi ridefinire le regole degli scacchi, proponendone varianti originali, ma troveresti ben poche persone disposte a farsi una partita con te.»

« », commenta Hans, zittito dall'improvvisa irruenza di Clara. Questa, senza neanche pigliar fiato, riprende subito il filo del discorso: «Una matrice peculiare è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

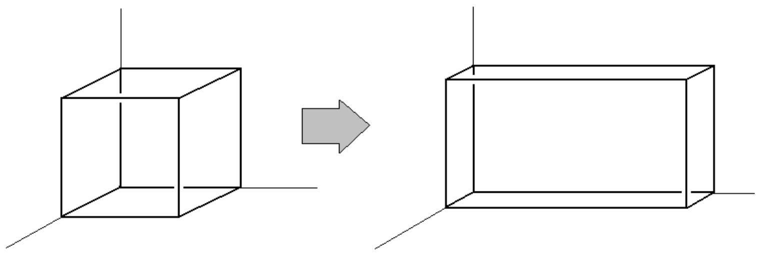
che "schiaccia" tutti i punti dello spazio nell'unico punto $(0, 0, 0)$. Una matrice pure interessante è questa:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che viene chiamata *identità*. Essa trasforma ciascun punto esattamente in se stesso, lasciando quindi inalterato lo spazio. Le tre postazioni dove la matrice vale 1 costituiscono la cosiddetta *diagonale principale*.
La matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha l'effetto di dimezzare la coordinata x, di duplicare la y, e di lasciare inalterata la z. Per dare un'idea dell'effetto che provoca, considerato un cubo con i lati paralleli agli assi, dopo la trasformazione, i punti che stanno in esso vengono a trovarsi all'interno di un parallelepipedo:



In modo similare, una sfera viene trasformata in un *ellissoide*.»

«E rotationen qvando arrivano?», domanda Hans.

«Ho bisogno di qualche definizione supplementare», continua Clara. «Intanto occorre spiegare come si esegue il prodotto fra due matrici, ad esempio queste:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bisogna vedere M_2 come se fosse costituita da tre terne disposte verticalmente, una a fianco all'altra:

$$M_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Successivamente, si esegue la moltiplicazione della prima matrice, M_1, per ciascuna delle tre terne, mediante la regola vista prima, cioè:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le nuove tre terne che si ottengono vengono nell'ordine disposte verticalmente una a fianco all'altra. Cosicchè:

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 7 & 4 & 15 \\ 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Dunque, il prodotto delle due matrici M_1 e M_2 è ancora una matrice. Si può dimostrare che quest'ultima rappresenta la trasformazione dello spazio che si otterrebbe se applicassi prima la trasformazione corrispondente ad M_2 e dopo quella relativa ad M_1. Capisco che l'idea non sia facile da digerire. Puoi fare la verifica prendendo il punto generico di coordinate (x, y, z). Prova prima a trasformarlo tramite la matrice prodotto. Poi prova a trasformarlo mediante M_2 e, successivamente, a ritrasformare ciò che hai ottenuto applicando M_1. Otterrai lo stesso risultato finale. L'ordine con cui esegui il prodotto è pure importante. Infatti se calcoli M_2M_1 ricavi in genere una matrice differente:

$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -3 & 14 \\ -7 & -1 & 6 \\ -12 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Nel gergo matematico questa proprietà si esprime dicendo che il prodotto fra matrici non è un'operazione *commutativa*.

Per meglio comprendere perché due trasformazioni non "commutano", prendi quelle espresse dalle due seguenti matrici:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M_1 produce l'effetto di scambiare la coordinata x con la y, cioè il punto (x, y, z) viene trasformato in (y, x, z). La matrice M_2 raddoppia la prima coordinata. Eseguendo il prodotto M_1M_2, ottieni qualcosa di equivalente a moltiplicare per 2 la x e poi scambiare $2x$ con y. Eseguendo invece il prodotto M_2M_1, scambi prima la x con la y, e poi raddoppi quest'ultima coordinata, non ottenendo dunque lo stesso risultato. Per fare un altro paragone, supponi che M_1 corrisponda all'operazione di farsi il bagno, ed M_2 a quella di spogliarsi. Chiaramente, fa una certa differenza mutare l'ordine delle operazioni, a meno che non ti crei problemi il fatto di entrare in vasca vestito.»

«Oh! Siamo già volando su Nova Zcotia ..., ma rotationen qvando arrivano? », domanda ancora Hans.

«Ci siamo, ci siamo», risponde Clara. «Devo dare ancora qualche piccola definizione. Data una matrice M, si chiama *trasposta*, quella matrice M^T che si ottiene ribaltando i numeri che compongono la matrice, a cavallo della *diagonale principale*. Ci si spiega meglio facendo un esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ \pi & \frac{3}{2} & 5 \\ -15 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad M^T = \begin{pmatrix} 6 & \pi & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & \sqrt{2} \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Le *righe* sono diventate *colonne* e viceversa. Ovviamente, "trasponendo" due volte la matrice M si riottiene ancora M.

Siamo pronti! Eccoci alla definizione finale. Diremo che una matrice M è *unitaria* se moltiplicando la sua traposta per M si ottiene come risultato la matrice *identità*:

$$M^T M = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come ho detto prima, la matrice I lascia inalterato lo spazio, pertanto, la trasposta M^T di una matrice unitaria M produce l'effetto inverso di M, cioè rimette le cose a posto. Non tutte le matrici godono di questa proprietà, come puoi riscontrare con una serie di esempi, per cui, quelle unitarie, costituiscono una *sottoclasse* con certi privilegi.»

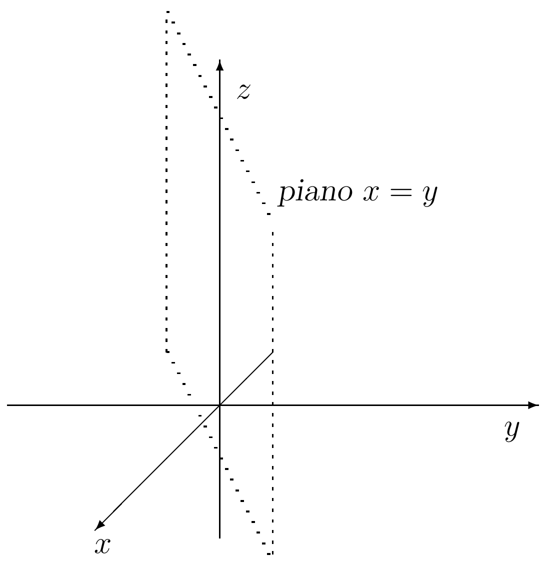
Segue mezzo minuto di silenzio. «E allora?», chiede perplesso Hans, ancora in attesa delle rotazioni.

«Allora ci siamo!», dice Clara. «In gran parte, le matrici unitarie rappresentano delle rotazioni. Inoltre, tutte le rotazioni dello spazio, rispetto ad un asse passante per l'origine, danno luogo a matrici unitarie. Infatti, una delle caratteristiche delle matrici unitarie è quella di modificare i punti dello spazio lasciando invariate le loro distanze reciproche. La dimostrazione di questo fatto non è difficile, ma preferirei evitarla. Se ci pensi bene, le uniche trasformazioni che lasciano immutate le distanze fra i punti dello spazio, sono appunto, oltre alle traslazioni, le rotazioni e le riflessioni rispetto ad un piano, o una combinazione di queste due. Ecco qualche esempio di matrici unitarie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t & -\sqrt{1-t^2} & 0 \\ \sqrt{1-t^2} & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E' evidente che la prima, l'identità, sia unitaria, dovendosi avere: $I^T = I$ e $I^T I = I$.
La seconda la abbiamo già vista. Essa scambia la x con la y, e rappresenta una riflessione speculare rispetto al piano individuato dai punti tali per cui $x = y$.



La terza matrice, dove t è un parametro compreso fra -1 e 1, costituisce una rotazione vera e propria rispetto all'asse z. Infatti, applicando le ormai consuete regole di moltiplicazione, si ricava:

$$\begin{pmatrix} t & \sqrt{1-t^2} & 0 \\ -\sqrt{1-t^2} & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -\sqrt{1-t^2} & 0 \\ \sqrt{1-t^2} & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ho tenuto presente che $t^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1$.

Se vuoi sapere di quanto si è ruotato, e ti ricordi ancora qualcosa di trigonometria, basta che poni $t = \cos\theta$. Guardando il piano individuato dagli assi x e y dall'alto del punto $(0, 0, 1)$, situato sull'asse z, vedrai che tale piano è stato ruotato di un angolo θ in senso antiorario. Nota che il caso $\theta = 0$, cioè nessuna rotazione, corrisponde a $t = 1$, e che la matrice risultante risulta doverosamente essere uguale ad I.

Analoghe rotazioni, rispettivamente lungo gli assi x ed y, sono rappresentate dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -\sqrt{1-s^2} \\ 0 & \sqrt{1-s^2} & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r & 0 & -\sqrt{1-r^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{1-r^2} & 0 & r \end{pmatrix}$$

dove i parametri s e r, compresi fra -1 e 1, sono legati ai rispettivi angoli di rotazione.

Moltiplicando ripetutamente le matrici di rotazione viste ora, puoi ricavare altre rotazioni rispetto ad assi passanti per l'origine, non coincidenti con nessuno degli assi x, y e z.»

«Non forrai farmi credere che pilota fa conti con matrici prima di ghirare aereo: " Mi zcuso con viagghiatori ma stiamo precipitando perché sbaghliato calcoli di firata ..."», esordisce Hans ridendo goffamente e dando spallate ad Irene, che reagisce abbozzando anch'essa un odioso sorrisino.

«Il pilota certamente no», risponde Clara senza scomporsi. «Ma il *computer* di bordo sì. Esso ha accesso alla lettura dei dati degli strumenti, ne registra le variazioni e avverte il pilota in caso di anomalie. Al suo interno, un *micro processore* esegue veloci calcoli, basati anche sull'algebra delle matrici, per analizzare in tempo reale la situazione.

Come credi che si possa orientare un satellite alla distanza di decine di migliaia di chilometri, se non inviandogli via radio opportune istruzioni? E quale forma più sintetica di linguaggio puoi adottare dei nove numerini che descrivono la corrispondente matrice di rotazione? E quando giochi ai *videogames*? Quelli nei quali segui la tua eroina, la signorina *Croft*, equipaggiata da combattimento, muovendo il *joystick* per cercare di farla uscire da sordidi pertugi codificati in labirinti virtuali. Quando cambi direzione, il labirinto, giacente in qualche forma nella memoria del *computer*, non viene fisicamente alterato, ma la tua visione di esso viene "filtrata" attraverso matrici che esprimono i cambiamenti di orientazione. Sono convinta che di solito presti più attenzione alle "poppe" della signorina che a questi risvolti tecnici.»

«Basta! Mi hai convinto di utilità di matrici», dice Hans, pensando alle poppe dell Croft.

Clara però non si arresta e avanza come un fiume in piena. «Un'altra questione interessante, collegata alle matrici unitarie, è la seguente. Supponi ad esempio che ti venga assegnata la seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Una verifica sul prodotto $M^T M$ ti permetterà di stabilire che M è unitaria. Ma come decidere se M è una rotazione? E intorno a quale asse? Per avere la risposta bisogna ricordarsi cos'è un asse di rotazione. Esso è costituito da tutti i punti (x, y, z) le cui coordinate rimangono immutate mentre si esegue la rotazione. Ci sono infiniti di tali punti. Ad ogni modo, è necessario che per essi sia verificata la seguente relazione:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Esistono tecniche opportune per la determinazione di tali valori x, y e z. Nel caso specifico si può controllare che una possibile soluzione è costituita dalla terna $(1, \sqrt{2} - 1, 1)$. Congiungendo il punto $(0, 0, 0)$ con $(1, \sqrt{2} - 1, 1)$ si individua la retta corrispondente all'asse di rotazione.

Si può impostare in generale il problema domandandosi se, per una data matrice M, sia possibile determinare una costante λ e delle terne (x, y, z) tali per cui:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Se la matrice è di “pura” rotazione, ai fini della determinazione dell’asse hanno interesse quei punti (x, y, z) per i quali $\lambda = 1$. Se la matrice combina sia la rotazione che una riflessione, si può dimostrare che i punti appartenenti all’asse si riflettono essi stessi rispetto all’origine. Pertanto, ha interesse la ricerca di quelle terne (x, y, z) per le quali $\lambda = -1$.

Non per tutti i valori di λ si possono trovare delle terne. Per un’assegnata matrice, non necessariamente unitaria, esistono dei corrispondenti valori di λ, detti *autovalori*, che caratterizzano molto bene la matrice stessa. Lo studio degli autovalori è particolarmente significativo, non solo in matematica, ma in moltissime discipline dove le matrici giocano un ruolo di primaria importanza.»

In quel momento l’aereo si inclina in avanti e la voce sdolcinata della *hostess* comunica di allacciarsi le cinture di sicurezza. Ha inizio la discesa verso il *JFK*, dove, a detta del pilota, è previsto l’atterraggio entro una ventina di minuti. Poco dopo, Hans ha occasione di osservare che la parte posteriore delle ali viene fatta inclinare verso il basso al fine di aumentare il *drag*, così come gli aveva anticipato Clara. Le coste di Long Island sono a poche centinaia di metri sotto di loro.

5

Ancora affaticati dalla lunga trasferta e dal *jet lag*, Clara, Irene e Hans sono sistemati ormai da qualche giorno a casa di Gary e di sua moglie Loretta, nei pressi di New Haven. Il quartiere, immerso nei boschi e costituito da tipiche costruzioni stile *New England*, è il luogo ideale per qualche giorno di vacanza. Purtroppo, fin dal primo momento, Clara viene coinvolta da Gary in alcune faccende riguardanti la sua ditta di consulenza. D'altronde questi erano i patti.

«Dai! Sbrighiamoci ad uscire», implora Loretta. «E' una delle rare occasioni in cui Gary mi porta fuori a cena; non vorrei che cambiasse idea all'ultimo momento. Ma dove si è cacciata Irene?»

«E' andata su a cambiarzi», le risponde Hans.

«Ancora? Quella ha un guardaroba infinito! Passa più tempo a cambiare gli abiti che a indossarli», osserva Loretta. Rivolgendosi poi al resto del gruppo aggiunge: «E voi? Non discuterete di lavoro anche questa sera?»

«Ztiamo qvi poco tempo. Bisoghna di zfruttare pene tutti minuten», dice quel rompiscatole di Hans.

«*That's right*!», rincara Gary, che capisce molto bene l'italiano (anche quello rozzo di Hans), ma che si vergogna a parlarlo.

«*OK*», commenta Loretta con una punta di insoddisfazione. «Però, usciamo di casa al più presto; non vedo l'ora di addentare una soffice aragosta.»

Appena terminata la frase, Irene, con i seni esorbitanti mal contenuti da un audace completo di seta nera, comincia a scendere la scalinata. I due uomini attoniti seguono con avidità i suoi movimenti fino all'arrivo sull'ultimo gradino.

Il *buffet* a prezzo fisso, quasi tutto a base di pesce, è ottimo, e Gary, malgrado sia già fornito in zone strategiche del corpo di ricche provviste di grasso, non esita a riempirsi il piatto più volte. A compensare le perdite subite dal ristorante per sfamare Gary, c'è Irene, che si accontenta di due gamberetti ed una crocchetta.

L'amabile conversazione istauratasi tra Clara e Loretta, riguardo agli splendidi saldi di stoffa in cotone a disegni floreali, proposti in un *mall* poco distante da Hartford, viene malamente interrotta da Hans, il rompiscatole: «Defo capire meghlio teoria che hai detto oggi. Profiamo di fare qvalche esempio», dice egli, mentre Gary, seduto al suo fianco, si fa ancora più vicino.

«Fammi prima prendere un po' di *dessert*», risponde Clara alzandosi e recandosi al carrello dei dolci. Torna qualche minuto dopo con il piatto contenente una dose di calorie sufficiente a correre una maratona. C'è perfino una fetta di torta al cacao col ripieno di nocciole e la cioccolata fusa sopra. Tanto il gestore del locale (a cui è ben nota la storia dei due polli a me e zero a te, che di media fanno uno a testa) può rifarsi su Irene, che si è servita solo di una mela.

«Dunqve, fabbrica che ora segue Gary produce deterzivi», comincia col dire Hans. «Per zemplificazione, facciamo che produce solo tre tipi: qvello *plain*, poco costoso, qvello *medium*, di mighlior qvalità, e qvello *extra*, più pregiato.»

«La sai come la penso in fatto di detersivi ... sono tutti uguali. Variano solo la confezione, il profumo e i costi della pubblicità», osserva Clara.

«Sì ma qvesto cliente non sa. Lui penza che uno lava meghlio di altro, perchè ha pianta tropicale o fiore di oriente dentro», ribatte Hans.

«*That's right*!», conferma Gary.

«Poi, c'è proprietario di fabbrica», riprende Hans, «lui decide cose con dadi ... »

«Sì, ma ora fai continuare me», dice Clara sbuffando, «con il tuo italiano, che peggiora di giorno in giorno, rischiamo di fare solo confusione. Almeno parlassi un po' di inglese!»

«*That's right*!», aggiunge Gary.

Clara prende il suo blocchetto degli appunti e comincia la lezione. «A grandi linee mi avevate già spiegato stamattina qual è il problema. Vediamo di adattarlo al caso dei tre detersivi. Ci penserà poi Gary a fare le dovute generalizzazioni.»

Ingurgita una splendente ciliegina con tutto il suo soffice letto di panna fresca. Poi riprende: «Come hai detto tu Hans, al proprietario piace giocare ai dadi. Ogni giorno cambia tipo di detersivo da produrre, quindi, noto il tipo che è stato lavorato il giorno addietro, deve scegliere tra i due rimanenti. Egli cerca di favorire la produzione dei tipi meno costosi, il *plain* e il *medium*, perchè hanno miglior mercato. Tira dunque un dado e, se esce un numero inferiore o uguale a 4, quel giorno produrrà il detersivo di qualità inferiore, altrimenti, se esce il 5 o il 6, produrrà quello di qualità superiore. Ad esempio, se il giorno prima è stata la volta del *medium*, e nel tirare il dado esce il 2, quel giorno produrrà detersivo di tipo *plain*. Se invece esce il 6, manderà in produzione quello di tipo *extra*. La probabilità che tocchi al *plain* è 4 su 6, cioè $\frac{2}{3}$. Invece, la probabilità che tocchi all'*extra* è solo 2 su 6, cioè $\frac{1}{3}$. La situazione è simile se il giorno prima è stato prodotto un altro tipo di detersivo.»

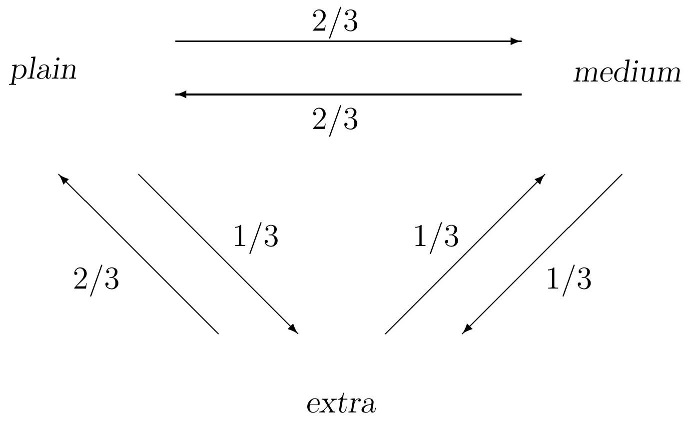
«*That's right*!», commenta Gary, soddisfatto dall'esposizione di Clara, mentre ingolla una cucchiaiata di budino.

«Possiamo riassumere tutti i casi possibili mediante una matrice», continua lei, intaccando il pezzo di torta con le fragole. «Ecco qua:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ti ricordi delle matrici vero Hans?»

Lui mugugna qualcosa, ma Clara sta già proseguendo. «Ogni giorno si suppone di essere in un certo *stato*, il quale esprime il tipo di detersivo prodotto. I numeri che compaiono nella matrice riassumono la probabilità di mutare stato il giorno successivo. Nella prima riga, ad esempio, ci sono le probabilità di passare dalla produzione di *plain* a quella degli altri detersivi. La matrice equivale dunque al seguente schemino:



nel quale sono sintetizzati i vari possibili *cambiamenti di stato* accanto alle loro probabilità.

La diagonale principale della matrice è formata esclusivamente da zeri. Questo si spiega osservando che la probabilità che un detersivo prodotto il giorno prima, venga prodotto anche il giorno dopo, è nulla, in quanto il proprietario ha deciso di cambiare tipo quotidianamente. Ti ricordi della diagonale principale vero Hans?

Insieme ad M possiamo considerare la trasposta di M, data da:

$$M^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ti ricordi della trasposta, *VERO* Hans?»

«Ma sì, ma sì che io ricorda di diagonale e trasposta, mi hai fatto un testa cozì con matrici qvando era in aereo!», dice Hans lamentoso. Intanto, gli riaffiora il pensiero delle zinne della Croft.

«Bene!», afferma Clara. «Ti ricorderai anche come fare la moltiplicazione di una matrice per una terna, detta anche *vettore*. Prendiamo ad esempio il vettore (x, y, z). Ad esso si può attribuire il seguente significato: la quantità x rappresenta la probabilità che il detersivo *plain* venga prodotto quel giorno, la quantità y è riferita invece alla probabilità che il detersivo *medium* venga prodotto quel giorno, la quantità z è infine riferita alla probabilità che il detersivo *extra* venga prodotto quel giorno. E' d'obbligo che x, y e z siano numeri compresi fra 0 e 1. Inoltre si deve avere: $x+y+z=1$, equazione che, fra le altre cose, esprime il fatto che sicuramente almeno un tipo di detersivo verrà prodotto quel giorno.

Supponiamo dunque che il primissimo giorno il vettore sia $(1,0,0)$. Questo significa che andremo in produzione col detersivo di tipo *plain*. Proviamo a fare la moltiplicazione della matrice M^T per questo vettore:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

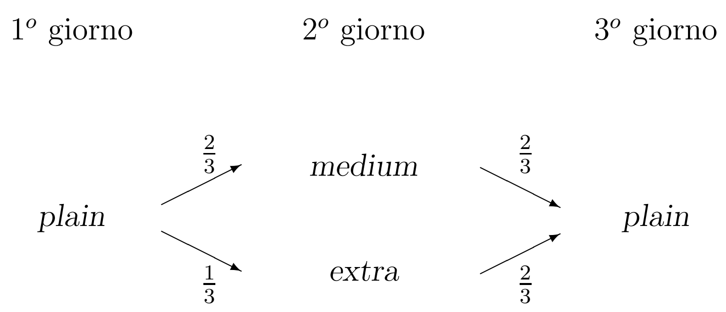
Se ne ricava così un altro vettore che esprime la situazione del giorno dopo, nella quale avremo che il detersivo *medium* viene prodotto con probabilità $\frac{2}{3}$ e quello *extra* con probabilità $\frac{1}{3}$. Ciò conferma le nostre aspettative.

Se noi ora moltiplichiamo la matrice M^T per quest'ultimo vettore, potremo ottenere la situazione del giorno ancora successivo:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Intanto osserviamo che ciascuno dei numeri che compongono il nuovo vettore è tra 0 e 1. In più la loro somma eguaglia uno: $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=1$.

Il fatto che il primo numero sia pari a $\frac{2}{3}$ si spiega nella seguenta maniera. Ci sono due motivi diversi che portano alla produzione del detersivo *plain* al terzo giorno. Esso può essere prodotto, con probabilità $\frac{2}{3}$, posto che il *medium* sia andato in produzione il giorno precedente. Quest'ultimo tuttavia poteva essere stato scelto solo con probabilità $\frac{2}{3}$, se si torna ancora indietro al primo giorno. Perciò, si ricava una probabilità pari a $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ di produrre il *plain* al terzo giorno, dato che nel secondo sia stato il turno del *medium*. Ma può anche accadere che il secondo giorno sia stato prodotto l'*extra*, con probabilità $\frac{1}{3}$ rispetto al primo giorno. Da questo ragionamento si arriva ad una probabilità pari a $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ di produrre il *plain* al terzo giorno, nell'ipotesi che nel secondo giorno sia stato prodotto l'*extra*. Seguendo i due possibili percorsi si sommano le probabilità, donde si ricava: $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$. Forse la cosa è più evidente se si fa riferimento a questo schemino:



La moltiplicazione della matrice M^T per il vettore $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, proprio per la tecnica con cui viene eseguita, tiene appunto conto di questi sottili passaggi. Ci sono osservazioni?»

«*Ja*», dice Hans, «si fede che in terzo giorno proporzioni di deterzivo non viene rizpettate.»

«Non è poi così sbagliato», risponde Clara. «Se per un certo prodotto la probabilità il giorno prima era alta, non può rimanere tale il giorno successivo, giacchè si era deciso di cambiare tipo di detersivo ogni volta. Inoltre fate attenzione. Stiamo parlando di fenomeni aleatori. Questo non necessariamente rispecchia la situazione reale. Se, ad esempio, tutti i giorni il responso del dado è 6, si rimbalza tra la produzione del *medium* e quella dell'*extra*, senza mai toccare il *plain*. Non è impossibile che il 6 si presenti per cento volte di seguito, anche se questa stessa eventualità è poco probabile.»

Gary, intento a recuperare col cucchiaino tutti i residui di crema al cioccolato spalmati sul piatto, dà il suo assenso con un buon: «*That's right*!»
Ora il piatto si presenta con un reticolo marrone dal quale egli cerca di centellinare ancora qualche microgrammo di dolce essenza.

Ottenuto l'assenso di Gary, Clara riprende il filo del discorso. «Visto che ci siamo, diamo anche un'occhiata al programma del quarto giorno. Basta moltiplicare la solita matrice M^T per la terna di probabilità che avevamo al terzo giorno:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{14}{27} \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix}$$

Ecco fatto!»

«Strano! Ora probabilità di produzione di *plain* è scesa, perchè $\frac{2}{9}$ più piccolo di $\frac{14}{27}$», dice Hans.

Ma Clara non gli dà ascolto. «Vediamo cosa avviene al quinto giorno:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{14}{27} \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{27} \\ \frac{19}{81} \\ \frac{20}{81} \end{pmatrix}$$

Vedi che il comportamento comincia ad assestarsi in quanto $\frac{14}{27}$ è maggiore di $\frac{19}{81}$.»

«Giusto, sì, ma proprietario fuole di zapere alla fine in che proporzioni fiene fatto deterzivo, e qvesti fettori non dice niente, un poco su, un poco giù ... »

«Il proprietario le proporzioni esatte non le saprà mai!», sentenzia Clara, «Finchè si ostina a decidere le cose giocando a dadi. Può però conoscere la probabilità associata all'evento di produrre detersivo di un tipo, dell'altro, o dell'altro ancora. I numeri si stabilizzano andando avanti con i giorni, moltiplicando e rimoltiplicando per la matrice M^T. Se ti dà troppo fastidio farlo

a mano, nulla ti impedisce di scrivere un piccolo programmino e farlo "girare" su un *computer*. La soluzione ottimale sarebbe quella di iterare questo procedimento infinite volte, andando cioè a cercare il "limite" della successione di vettori.
So già cosa state per dirmi: che infinite volte non può andare avanti nessuno. Non vi preoccupate, il limite può essere determinato lo stesso, con assoluta precisione, senza molti sforzi. Ora ve lo spiego ... ma, prima, fatemi chiudere un piccolo conto aperto con questi ... »

Mentre i due interlocutori attendono con impazienza che Clara sveli i suoi trucchi, essa si mette in adorazione del bottino rimasto dopo aver pazientemente rimosso tutte le decorazioni dalle fette di torta, queste ultime giacenti ormai all'interno del suo stomaco. Ci sono un paio di lamponi, delle mandorle, una stellina di zucchero, un confetto rosa e una libidinosa pallettina di cioccolato pralinato. Passano alcuni minuti nei quali Clara con calibrata attenzione degusta una per una, nell'ordine citato, le varie prelibatezze. Lo spettacolo è accompagnato da mugugni di soddisfazione. Ad Hans e Gary non resta che rimirare il soffitto. Finita la cerimonia, Clara è pronta a riprendere la discussione.

«Rieccomi qua! Bene, bene. Dov'eravamo rimasti ... al limite. In pratica voglio sapere cosa accade al vettore iniziale $(1, 0, 0)$ dopo averlo trasformato, ritrasformato e ritrasformato ancora, per infinite volte, attraverso la matrice M^T. Non sto a dilungarmi nei dettagli, ma, in sommi capi il vettore "limite", che effettivamente esiste sotto opportune condizioni, venendo da così tante trasformazioni, alla fine non si trasforma più, cioè rimane invariato malgrado lo si moltiplichi ancora per la matrice. Nella pratica si tratta di cercare un vettore (x, y, z) sul quale M^T non fa effetto. In breve, occorre avere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ti ricordi, caro Hans, quando in aereo volevamo cercare l'asse di una rotazione? Quando parlammo di autovalori? Ebbene, ora qui le rotazioni non c'entrano per niente, ma il problema è del tutto simile. Bisogna anche aggiungere che x, y e z, rappresentando probabilità, devono essere fra 0 ed 1, e la loro somma deve fare esattamente 1. Armati di astuzia e di pazienza si possono ricavare le tre incognite x, y e z, scoprendo che l'unica soluzione ammissibile è $(\frac{2}{5}, \frac{7}{20}, \frac{1}{4})$. Cioè:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{7}{20} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{7}{20} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Finalmente abbiamo: $\frac{2}{5} > \frac{7}{20} > \frac{1}{4}$.

Supponiamo, ad esempio, che il ricavato che si ottiene dalla vendita del detersivo *plain* prodotto in un giorno, sia 1000$, che il ricavato relativo al detersivo *medium* sia 1200$ e che quello relativo al detersivo *extra* sia 1600$. Mediamente, ripeto mediamente, il signor proprietario della fabbrichetta deve aspettarsi un ricavo pari a:

$$\frac{2}{5} \cdot 1000\$ \ + \ \frac{7}{20} \cdot 1200\$ \ + \ \frac{1}{4} \cdot 1600\$ \ = \ 1220\$$$

relativamente ad una giornata di lavoro. Se questo è ciò che aveva previsto, bene, continui così, altrimenti si dia altre regole. L'importante è capire come si impostano i dati.»

«*That's perfectly right*!», dichiara Gary soddisfatto.

In un attimo di esitazione, irrompe Loretta: «Avete finito voi tre? Per fortuna che la cena era ottima, perchè, se avessi dovuto dare un voto alla compagnia, il mio giudizio sarebbe stato scarso, decisamente scarso.»

Con questo commento Loretta esprime il suo disappunto non solo per il comportamento incivile del gruppo degli incalliti lavoratori, ma anche nei riguardi di Irene, rifugiatasi nel bagno 25 minuti prima e mai più ricomparsa.

Gary in risposta propone: «*OK, let's stop here. It's enough for today. It's time to go home, where we can have some* grappa *and watch sport on TV.*»
In quel mentre si materializza Irene.

«Non stai bene?», le chiede Hans.

«Sto benissimo», risponde lei con la solita voce melliflua, «ero solo andata a mettermi un po' di cipria.»

6

Dopo una settimana di intenso lavoro, mancano solo pochi giorni alla conclusione della trasferta americana di Clara.

«Vi ricordo quali sono i patti», proclama Loretta. «Da domani, sabato, NON si lavora più. La giornata sarà dedicata allo *shopping* sfrenato. Domenica andremo tutti a farci una gitarella a New York. In un'ora abbondante di auto saremo a *Manhattan*, e ritorneremo in tarda serata, a meno di non voler folleggiare al *Greenwich* tutta notte. Credo sia superfluo rammentarvi che lunedì avrete il volo di ritorno da Boston e che vi accompagneremo all'aereoporto.»

«*That's right!*», commenta Gary nella sua tuta da ginnastica color amaranto.

L'esultanza di Clara per la proposta di Loretta viene mitigata da Hans che esordisce dicendo: «Però, ogghi solo fenerdì, qvesta sera è permesso ancora di parlare di laforo.»

Quando Gary fa notare che ormai avevano esaminato tutte le questioni, alle quali avevano nel più dei casi fornito brillanti risposte, Hans insiste: «Io ha ancora un coza in sozpeso. Durante viagghio per fenire qva, Clara afefa promesso zpiegare me come si zcrife eqvazioni di mofimento di partichelle di aria. Io troppo curioso! Non mi muofe di New Haven se non si chiarisce qvesta ztoria.»

Dopo aver chiesto ulteriori delucidazioni ad Hans e Clara, Gary si lascia convincere ammettendo infine che un approfondimento culturale può essergli di miglior giovamento che guardare sport in televisione. Pertanto, dopo cena, il gruppetto si raduna nel salone. Mentre Loretta taglia a fette un'invitante *pecan pie* amorevolmente preparata da lei stessa, e Irene con una scusa si congeda in camera sua, Clara inizia quello che sarebbe stato un lungo sermone.

«Non pensiate che sia una cosa semplice», comincia col dire lei, «cercherò di darvi solo qualche idea di base. Un approccio più serio necessiterebbe infatti di un'estesa conoscenza di alcuni strumenti della fisica matematica. Mi sforzerò di descrivervi le cose nel modo più elementare possibile, anche se questo potrà probabilmente farmi scappare qualche inesattezza. Penso che limiterò la mia dissertazione all'*equazione di continuità*, che è solo un ingrediente di tutto il sistema di equazioni. Per di più restringerò la discussione solo al caso *incomprimibile*.»

Gli astanti sgranano gli occhi, ma Clara imperterrita continua. Oramai lo si sa, cercare di arrestarla a questo punto sarebbe come voler affrontare una slavina con una racchetta da ping pong.

«Non guardatemi in quel modo! Cosa non vi è piaciuto? Il termine incomprimibile? Vuol dire solo "non comprimibile", è una caratteristica attribuibile a molti fluidi, purchè non siano sollecitati da grandi sforzi meccanici o forti variazioni di temperatura, tali da far mutare la loro *densità* da punto a punto in modo significativo. Per farla breve, se rimestate dell'acqua in un bicchiere con un cucchiaino, potete considerare il fluido in questione completamente incomprimibile. In effetti, non riuscirete a "schiacciare" l'acqua, premendola col cucchiaio contro il bordo del bicchiere, essa sfugge sempre da qualche altra parte, mantenendo il volume globale sempre costante. Non lo stesso si può dire quando pressate con molto vigore un liquido o un gas, all'interno di uno stantuffo, tipo siringa o pompa per biciclette, tenendo chiuso l'orifizio di uscita. Nello studio di quest'ultimo fenomeno non si può prescindere infatti dal fatto che il fluido, sottoposto a tali condizioni, debba essere considerato comprimibile.

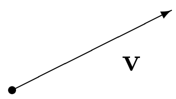
Quello che dunque caratterizza l'incomprimibilità è che la densità rimane costante. Anche se non ho definito questi concetti in maniera rigorosa, spero che abbiate capito cosa intendo. Siccome voglio arrivare ad esprimere con termini matematici queste idee, cerchiamo di impostare il problema di definire l'incomprimibilità usando un approccio meno descrittivo. Si ragiona nel seguente modo. Cominciamo a delimitare, in maniera del tutto fittizia, una piccola porzione di spazio nel contenitore in cui si muove il nostro fluido. Consideriamo, ad esempio, un piccolissimo cubettino fisso all'interno del recipiente. Il cubetto non ha vere pareti, è solo una entità geometrica e non fisica. All'interno del cubetto scorre il fluido, senza che di fatto il cubetto stesso intervenga a modificarne il movimento. Ad ogni intervallo di tempo, il fluido attraversa il cubetto, entrando da qualche sua parte ed uscendo da qualche altra. Parlo di cubetti, ma potrei anche considerare sferette o altre "regioni" di spazio abbastanza arbitrarie. I cubetti mi faciliteranno la trattazione più avanti, per cui è meglio abituarcisi fin da subito.

Diremo che il fluido è incomprimibile quando il bilancio fra ciò che entra e ciò che esce, ad ogni istante, è a pareggio. Più esattamente, qualsiasi sia la porzione che delimitiamo all' interno del fluido, questa deve avere la proprietà di "vedere" entrare ed uscire la stessa quantità di sostanza. Se, anche per un solo istante, in una qualunque regione, entrasse infatti più materiale di quanto ne esca, dovremmo registrare da qualche parte, all'interno della regione stessa, un aumento di densità, cioè una compressione. Viceversa, se ciò che entra è in misura minore di ciò che esce, dovremmo registrare un cambiamento di densità al negativo, cioè una rarefazione.

Quando si parla di bilanci in pareggio è inevitabile che venga fuori una qualche equazione. Infatti, l'ingrediente irrinunciabile di un'equazione è il segno =, che dice appunto che la quantità che sta a sinistra di esso pareggia quella che sta a destra.»

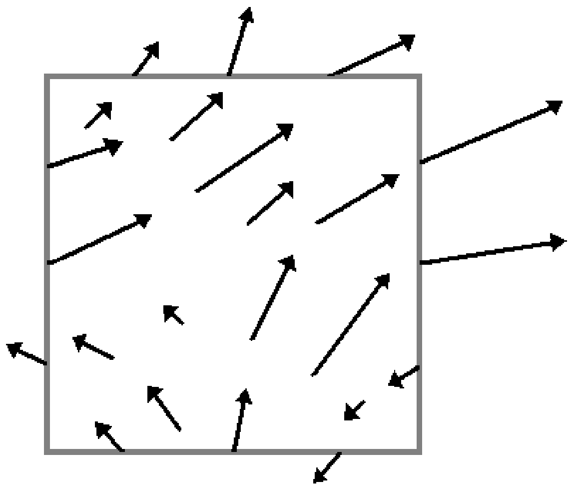
Il pubblico annuisce ma non proferisce parola. Non molto incoraggiata da questa scarsa emotività, Clara decide comunque di proseguire.

«A questo punto bisogna chiarire cosa vuol dire "entrare" ed "uscire", concetti che presuppongono che ci sia in effetti qualcosa in movimento. In pratica, ad ogni particella che compone il fluido, si assegna un "vettore", cioè una freccetta che indica la direzione in cui si muove la particella. Indicheremo il vettore con la lettera $\mathbf{v}$. Ecco qua:



La lunghezza della freccia è proporzionale alla velocità. La direzione e la lunghezza di ciascuna freccia possono anche cambiare man mano che il tempo scorre. Se in un certo punto il fluido è immoto, là non si assegna alcuna freccia, ma, un qualche istante dopo potrebbe svilupparsi del movimento, ed ecco comparire la relativa freccetta.

Ora, per semplicità, vi farò qualche disegno mettendomi nell'ipotesi che i vettori siano spiaccicati sul piano del foglio. In questo modo cerco di simulare il comportamento di un fluido bidimensionale, anche se i veri problemi che la realtà ci sottopone si riferiscono a casi tridimensionali. Il cubetto a cui accennavo prima, diviene ora un quadrattino. Per semplificare ulteriormente, non considererò quadrati "obliqui", ma solo quelli con due lati orizzontali e due verticali. Ecco una possibile configurazione:

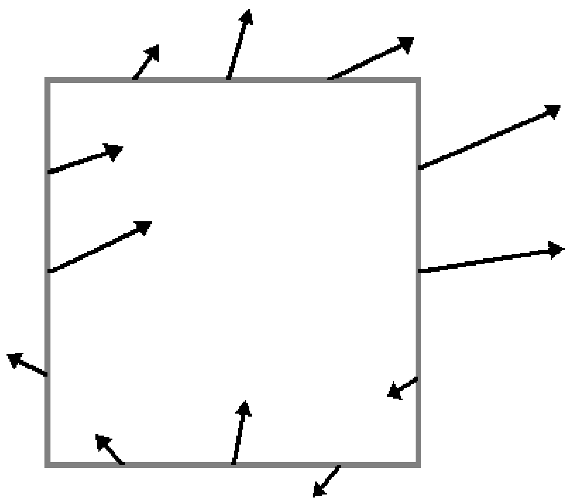


A dir la verità, le particelle che compongono il fluido sono così tante da potersi ritenere infinite, mentre io ho disegnato ben pochi vettori. L'importante è che intuiate le idee nella loro sostanza, per cui non fatemi far notte a disegnar freccette.»

Da dietro Gary, Loretta irrompe un attimo per liberare il tavolino dai piattini usati per la torta. Non osa chiedere se qualcuno ne vuole ancora per non interrompere il filo del discorso e si rifugia quatta quatta in cucina.

Clara prende fiato e ricomincia a parlare. «Per ciascun vettore, introduciamo un sistema di assi cartesiani allineati con i lati del quadrato e aventi come origine il punto di attacco del vettore. Possiamo quindi associare al vettore le sue coordinate, scrivendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, dove v_1 e v_2 sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata.

Bene! In prima approssimazione non mi interesserò delle particelle che stanno dentro al quadrato. Direi quindi, per ora, ma solo per ora, di eliminarle:



E' come se i quattro lati del quadrato avessero tante porticine; da alcune le particelle entrano, senza bussare, dalle altre se ne escono, senza neanche salutare. Si sa, le particelle sono maleducate! Bisogna dunque far la conta di quelle uscenti e di quelle entranti e vedere se il bilancio va in pareggio. Occorre però fare attenzione perchè nel conteggio entrano in gioco vari fattori. In primo luogo la lunghezza delle frecce. Una particella che entra o esce in modo irruento conta di più di una che lo fa in modo garbato. Lasciando in fretta la porta libera si dà la possibilità ad altre particelle di usufruirne, a vantaggio di altre zone dove il movimento avviene più lentamente.

Non solo! Conta anche l'angolo con cui si entra o si esce. Una particella che punta dritto all'uscio è più aggressiva di una che gli si avvicina di sbieco. Giusto per fare un esempio di caso estremo: una particella che, in base a ciò che indica la sua freccia, tende a muoversi parallelamente ad un lato del quadrato, tanto che non si riesce a capire se intende entrare o uscire, fornisce un contributo praticamente nullo.»

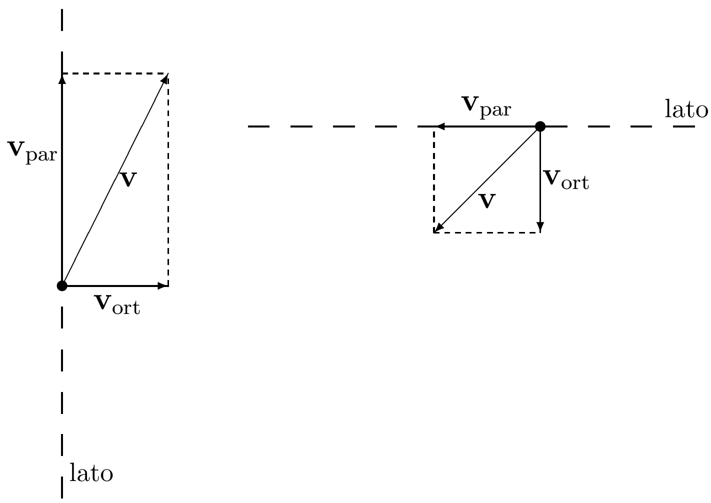
Clara si ferma un attimo ad osservare Gary che sbadiglia e Hans che si stropiccia gli occhi. Il pubblico si sta assopendo. Questo non la fermerà di certo.

«*That's right*?», domanda lei.

«*That's right*!», risponde prontamente Gary, con una insospettata capacità di riflessi.

«*Dats rait*!», aggiunge poco dopo Hans nel suo marcato accento teutonico.

Il *test* sembra essere superato, nonostante le apparenze il pubblico pare ancora vigile. Clara è in grado di proseguire: «Vediamo di ricapitolare: ci interessano solo le particelle che stanno sul perimetro del nostro quadrato fittizio ed è importante tenere in considerazione sia l'intensità del vettore ad esse associato che l'angolazione che detto vettore forma con il perimetro. Sistemiamo prima la faccenda dell'angolo di ingresso. Possiamo "decomporre" ciascun vettore in altri due, uno dei quali parallelo al lato del quadrato e l'altro ortogonale allo stesso lato. Lo si fa in questo modo:

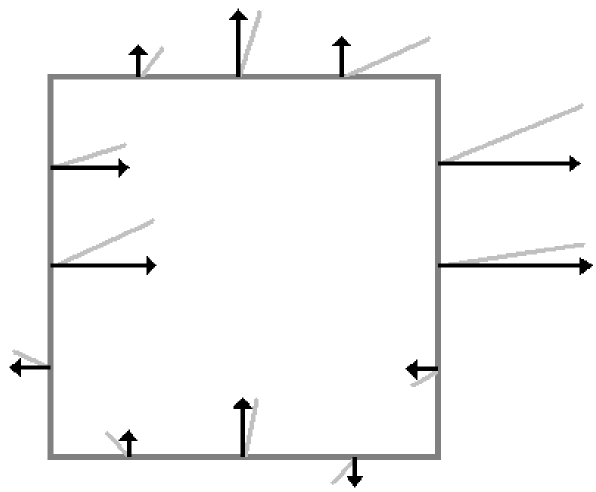


Questo vuole dire che lo spostamento della particella alla velocità individuata da $\mathbf{v}$ può essere visto come l'effetto combinato di uno spostamento a velocità $\mathbf{v}_{\mathrm{par}}$, lungo la direzione parallela al lato, ed uno spostamento a velocità $\mathbf{v}_{\mathrm{ort}}$, lungo la direzione ortogonale. Se una particella ha già velocità con direzione ortogonale al lato, allora $\mathbf{v} =$

$\mathbf{v}_{\rm ort}$ e $\mathbf{v}_{\rm par} = 0$. Se invece la sua velocità è allineata con il lato, allora $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\rm par}$ e $\mathbf{v}_{\rm ort} = 0$. Sono escluse in questo contesto le particelle, se ve ne sono, che stanno ai quattro vertici del quadrato. Diciamo che non ci importa molto di sapere cosa fanno; non saranno quattro particelle a governare il moto di un fluido!

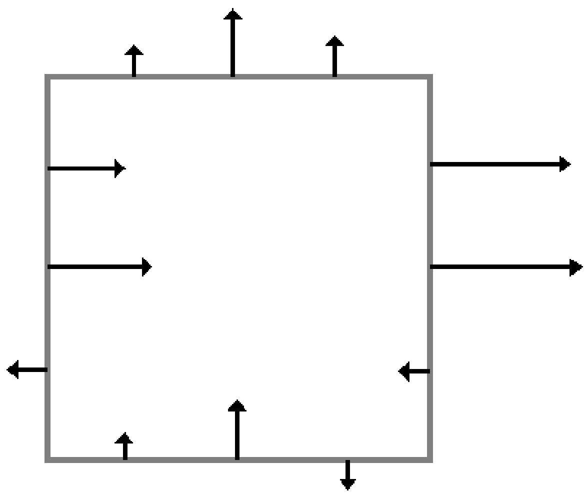
In altre parole, se, rispetto al sistema di assi cartesiani, il lato del quadrato è verticale, si salva solo l'ascissa, cioè il vettore (v_1, v_2) produce lo stesso effetto del vettore $(v_1, 0)$. Se, invece, il lato è orizzontale, il vettore (v_1, v_2) produce lo stesso effetto del vettore $(0, v_2)$.

Ma la velocità nella direzione parallela al lato non serve a decidere se un fluido è incomprimibile o meno. Vuol dire che nella nostra analisi converrà mantenere solo la componente $\mathbf{v}_{\rm ort}$. Nel nostro esempio, si arriva ad una situazione di questo genere:

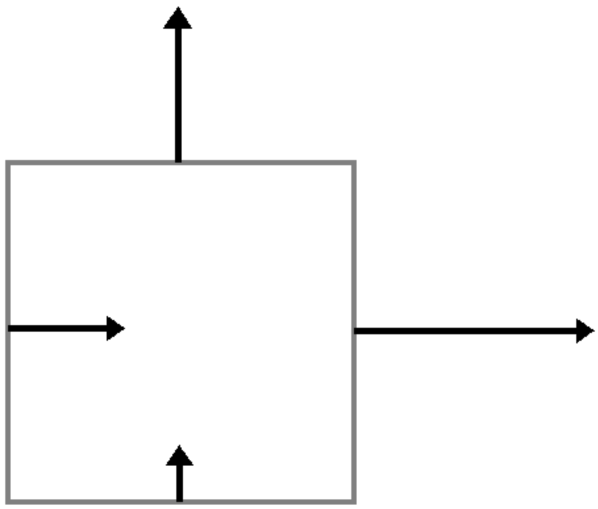


dove le frecce oblique vengono rimpiazzate da vettori ortogonali ai lati, senza che questo alteri il bilancio entrate-uscite.

Dunque, abbiamo a che fare con la seguente figura:



Ora si capisce più chiaramente chi viene e chi va. Ma si può fare di meglio! Si può decidere, per ogni lato, se predominano gli ingressi o le uscite. Basta fare la somma dei vettori velocità. Si tratta di una somma di tipo algebrico, ottenuta quindi addizionando i vettori orientati nello stesso verso, e sottraendo quelli orientati in verso contrario. Dopo questa semplificazione il risultato è il seguente:



Le frecce indicano ancora delle velocità, ma non sono attribuite ad alcun specifico punto. Esprimono il comportamento medio delle particelle che giacciono su ciascun lato. Affinchè il bilancio tra entrate ed uscite sia in pari occorre controllare la seguente relazione:

$$\begin{aligned} &\text{Quello che esce dal lato di destra} \\ -\ &\text{Quello che entra dal lato di sinistra} \\ +\ &\text{Quello che esce dal lato in alto} \\ -\ &\text{Quello che entra dal lato in basso} \ = \ 0 \end{aligned}$$

Più in generale, ciò che esce può venire scambiato in meno ciò che entra e, similmente, ciò che entra può venire scambiato in meno ciò che esce.

Si vede ad occhio che l'esempio che abbiamo trattato non soddisfa questa equazione. Questo ci permette di concludere che da qualche parte c'è stata una rarefazione, per cui il fluido in questione non può essere incomprimibile. E ora vi domando: cosa avremmo potuto concludere se, altrimenti, avessimo ottenuto esattamente zero?»

«Che fluido era incomprimibile», risponde Hans dimostrando di essere ancora sveglio, anche se la testa ciondolante e gli occhi semichiusi non depongono per questa versione.

«Male! Non ci siamo!», ammonisce Clara. «Non basta che per un certo quadrato la quantità di fluido che entra pareggi quella che esce. Questa è sicuramente una condizione necessaria, ma essa non è sufficiente. All'interno del quadrato ci potrebbero essere zone di rarefazione, compensate, sempre all'interno del quadrato, da zone di compressione, senza che al perimetro questo venga avvertito.

Bisogna ricordare che il quadrato è da ritenersi "arbitrario", intendendo che la relazione che fornisce la parità di bilancio fra ciò che esce e ciò che entra, deve essere controllata sul perimetro di qualsiasi quadrato, ovunque esso sia, grande o piccolo. Vi avevo già preannunciato che non sarebbe stata una cosa semplice. Nella sostanza, è abbastanza immediato verificare che un fluido è comprimibile: occorre, ad un certo istante, delineare almeno un quadrato dove la relazione di bilancio non è a pareggio. Molto più difficile è tuttavia verificare che un fluido è incomprimibile, essendo necessario ad ogni istante studiare il comportamento di tutti i possibili quadrati. Questo elimina difatti la possibilità che non ci siano zone di rarefazione o compressione all'interno del contenitore dove sta il fluido, perchè, se queste ci fossero, prendendo opportuni quadrati dentro di esso, queste verrebbero prima o poi messe in risalto.»

La testa di Gary crolla sulla sua spalla per poi rimbalzare di nuovo al suo posto. I suoi occhi sono piccoli piccoli, rossi rossi. Quasi tutte le aree del suo cervello sono ormai predisposte al definitivo stadio di sonno profondo. Resiste strenuamente ancora qualche neurone, presto destinato a soccombere. Mai, prima d'ora, Clara era stata così soporifera.

Hans sente il dovere di intervenire: «Ma allora tu non ha un sola eqvazione. Tu ha tante. Un qvadrato, un eqvazione. Due qvadrati, due eqvazione. Infiniti qvadrati, infinite eqvazione! Tu imbroghlia come il solito!»

«Devo ammettere che hai ragione», risponde Clara. «E per ciascuno degli infiniti quadrati devi analizzare i vettori di un numero praticamente infinito di particelle, e se il fluido è in movimento, tutto deve essere fatto ad ogni istante. Un gran bel da fare!

Gli scienziati del passato si sono però sforzati di rendere questo pesante fardello più digeribile. E così è nato il calcolo infinitesimale, al quale, se mi dedicate ancora un po' di tempo, posso fare qualche accenno.»

Dopo aver ricevuto il consenso da parte di Hans e pur sapendo che il 50% dell'auditorio è ormai passato nel mondo dei sogni, Clara riparte: «Supponendo che il lato di un certo quadrato sia lungo L, si considera questa quantità:

$$\begin{aligned}&\text{Variazione orizzontale} \;=\\ &= \frac{\begin{pmatrix}\text{Quello che esce dal lato di destra}\\ -\text{ Quello che entra dal lato di sinistra}\end{pmatrix}}{L}\end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga, si considera quest'altra quantità:

$$\begin{aligned}&\text{Variazione verticale} \;=\\ &= \frac{\begin{pmatrix}\text{Quello che esce dal lato in alto}\\ -\text{ Quello che entra dal lato in basso}\end{pmatrix}}{L}\end{aligned}$$

A questo punto, salvo aver aggiunto il termine L al denominatore, la relazione che esprime il pareggio di bilancio fra entrate ed uscite è la medesima. Si può pertanto scrivere:

$$\text{Variazione orizzontale} \;+\; \text{Variazione verticale} \;=\; 0$$

Andiamo ancora un po' avanti. Passettino dopo passettino. Supponiamo che in ciascun punto del quadrato che stiamo esaminando ci sia una particella. Lo so, qui si esagera! Le particelle sono in numero finito, mentre i punti del quadrato sono "mostruosamente" infiniti. Tuttavia, un'ipotesi largamente accettata è che le particelle siano così tante e così fitte che le si possano ritenere un "continuo". Visto che prima mi hai accusata di imbrogliare, ora confesso di stare effettivamente barando alla grande.

In ciascun punto di coordinate (x, y) trovo allora una particella e con essa il suo vettore velocità $\mathbf{v}$, che potrà essere messo in funzione delle variabili x e y, in modo che si possa scrivere: $\mathbf{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$. Abbiamo anche detto che $\mathbf{v}$ varia con lo scorrere del tempo, ma, per semplicità, non mettiamo per ora in evidenza questo fatto.

Ti ricordo che avevamo concluso che per gli spostamenti che avvenivano orizzontalmente, in maniera quindi ortogonale ai lati verticali di ogni quadrato, era sufficiente esaminare solo il comportamento delle ascisse di ciascun vettore. Per gli spostamenti verticali, lo studio poteva venir ridotto alle sole ordinate. Conseguentemente, mi permetterai di scrivere anche questa equazione:

$$\begin{gathered}\text{Variazione delle ascisse lungo la direzione orizzontale } + \\ + \text{ Variazione delle ordinate lungo la direzione verticale} \\ = \ 0\end{gathered}$$

la quale può essere perfezionata come segue:

$$\begin{gathered}\text{Variazione di } v_1 \text{ rispetto ad } x \ + \\ + \text{ Variazione di } v_2 \text{ rispetto ad } y \ = \ 0\end{gathered}$$

Ed ora viene il bello! So che qualche nozione di calcolo differenziale ti è stata impartita alle scuole superiori, per cui dovresti riuscire a seguirmi. Ti ricordo che vogliamo esprimere il fatto che un fluido sia incomprimibile. Perciò, l'ultima equazione che ho scritto, deve valere per ogni quadrato, e quindi qualsiasi sia la lunghezza del suo lato L. Prendiamo un quadrato di centro $C = (x_0, y_0)$ fisso e lato L variabile e studiamo cosa succede alle variazioni orizzontali e verticali quando L diventa sempre più piccolo. Come si usa dire, passiamo al limite per L che tende a zero. Si tratta quindi di calcolare delle derivate nel punto C. Ed ecco cosa si ricava:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x_0, y_0) \ + \ \frac{\partial v_2}{\partial y}(x_0, y_0) \ = \ 0$$

Te la leggo: nel punto C, la derivata rispetto alla variabile x della prima componente del vettore $\mathbf{v}$, sommata alla derivata rispetto alla variabile y della seconda componente di $\mathbf{v}$, deve dare risultato zero.

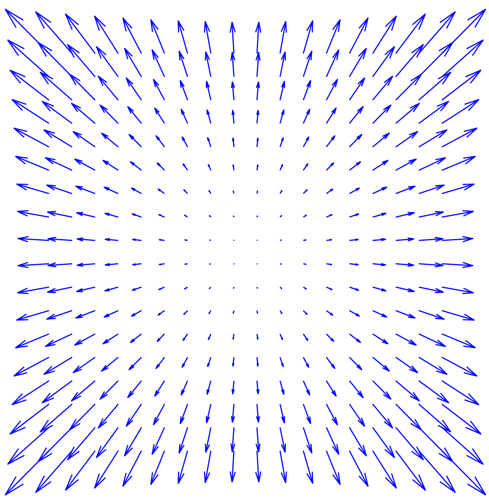
Questa è una scrittura estremamente compatta. Non ci sono più i quadrati ora, sono spariti! In compenso c'è il punto C, che è arbitrario. L'ultima equazione scritta equivale perciò ad infinite equazioni, essendo necessario richiedere che essa sia verificata per tutti i punti C che fanno parte del contenitore in cui si trova il nostro fluido. Inoltre, la stessa equazione deve valere ad ogni istante temporale. In suo favore gioca il fatto che è molto pratica per chi ha abbastanza dimestichezza con il calcolo infinitesimale. Essa si può facilmente estendere a contenitori tridimensionali. Basta supporre che il vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ abbia tre componenti, ciascuna delle quali dipende dalle tre variabili x, y e z. Pertanto, qualsiasi sia il punto $C = (x_0, y_0, z_0)$, si dovrà avere:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \ + \ \frac{\partial v_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \ + \ \frac{\partial v_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \ = \ 0$$

Nei casi in cui si conosce esattamente l'espressione delle componenti v_1, v_2 e v_3 in funzione di x, y e z, la verifica dell'equazione diviene piuttosto semplice, sempre che ti ricordi come si facciano a calcolare le derivate.»

«Fa me esempio», chiede Hans. Gary, al suo fianco, emette un piccolo grugnito.

Clara gli concede un: «E sia!». Un attimo di pausa e poi riprende: «Però, un paio di esempietti facili facili, e dopo ce ne andiamo a nanna. Dunque. In due dimensioni posso prendere $\mathbf{v}(x, y) = (x, y)$, cioè, da ogni punto di coordinate (x_0, y_0) parte un vettore le cui due componenti hanno rispettivamente lunghezza $v_1 = x_0$ e $v_2 = y_0$. Ti faccio il disegnino:



La situazione è stazionaria, ovvero non si evolve col tempo. In un qualsiasi punto calcoliamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

dove abbiamo tenuto conto che la derivata del monomio x, rispetto ad x, fa esattamente 1. Stessa cosa per quanto riguarda la y. La conclusione è che ovunque c'è più "roba" che esce rispetto a quanta ne entri. Il fluido in queste condizioni presenta infiniti punti di rarefazione. Ogni particella subisce un'accelerazione che la spinge ad allontanarsi dal punto centrale. La densità muta da punto a punto. Per riuscire ad immaginare una distribuzione del genere è inevitabile che il fluido sia comprimibile (al negativo, trattandosi di rarefazioni).

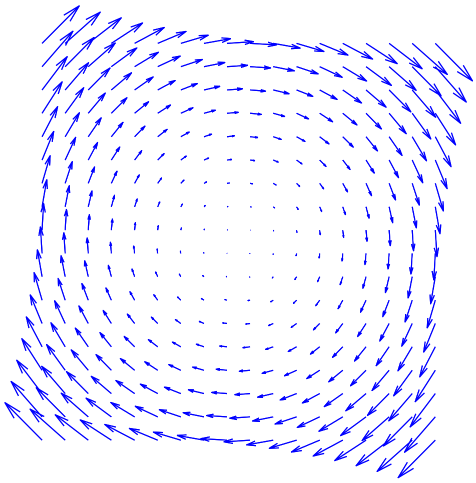
In fin dei conti, anche il disegno rende bene l'idea di ciò che accade. E' un po' come stiracchiare una membrana elastica. Il materiale si distribuisce su una superficie più vasta, diminuendo la sua densità interna.

Esaminiamo infine un caso incomprimibile. Poniamo $\mathbf{v}(x, y) = (y, -x)$. In ogni punto abbiamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

che, in base alla nostra definizione, implica l'incomprimibilità. Di fatto, v_1 non dipende da x, pertanto la sua derivata, fatta proprio rispetto ad x, è nulla. Analoga sorte tocca a v_2.

Il fluido gira in tondo e non sembra presentare compressioni o rarefazioni. La situazione appare come segue:



Ti ho già accennato al fatto che la conservazione della massa non è che una parte delle equazioni che regolano il movimento dei fluidi. Per proseguire è necessario aggiungere le relazioni che esprimono la formula $\vec{F} = m\vec{a}$. Tra le incognite del sistema che così si ottiene ci sono proprio le componenti del vettore che fornisce punto per punto la velocità del fluido. Ma non è il caso di procedere oltre su questa strada, la quale comincia a diventare troppo tecnica. Anch'io ammetto di star crollando dal sonno.» Terminata l'ultima frase, Clara posa la penna sul tavolino e si mette in *stand by*.

Loretta, che, in cucina, con l'orecchio teso, non aspettava altro che la discussione terminasse, fa "casualmente" ingresso in soggiorno. «A che punto siete? Avete finito?», domanda.

Ricevuta risposta affermativa Loretta aggiunge: «Tutti a letto allora! Ci aspetta un duro *weekend*.»

La ciurma ubbidisce di buon grado, compreso Gary che si alza dal divano e si dirige verso le camere con gli occhi sempre chiusi.

— ♠ —

Alle due di notte, vuoi per il gran caldo sprigionato dai radiatori dell'impianto di riscaldamento, vuoi perché ancora sintonizzata sul fuso orario italiano, Clara si desta. Non riuscendo a riprendere sonno, e memore dell'ottima e fresca spremuta di mele *McIntosh* giacente nel frigorifero, decide di fare una capatina giù in cucina. Le luci al piano terra sono tutte accese a confermare quanto sia a buon prezzo l'energia elettrica negli Stati Uniti. Clara sta per varcare la soglia della cucina, quando ode un gemito. A questo seguono fruscii vari, sospiri, affanni e altri rumori non ben catalogabili. Terrorizzata dall'idea che ci sia un orso feroce che si sta leccando tutte le cibarie, Clara prende subito in considerazione il fatto di avvertire Gary. Sopraffatta dalla curiosità decide, pur sapendo di rischiare, di dare prima una sbirciatina. La visione che si presenta ai suoi occhi è orripilante: sul tavolone, Hans e Irene, ignari di essere osservati, formano un groviglio di gambe e braccia in frenetico movimento. Insomma, una raccapricciante scena *hard*!

"Brtt str... " sta per urlare Clara; ma si trattiene. Rinunciando alla spremuta di mele torna su in camera, dove non riuscirà più a dormire. I giorni seguenti i suoi rapporti con Hans saranno alquanto freddi, senza che lui ne riesca a comprendere il motivo.

7

Come ogni sabato, Clara si reca al supermercato vicino a casa per la spesa settimanale. Sono passati due mesi dal suo ritorno dagli Stati Uniti e da allora non ha più incontrato Hans. Lui aveva cercato di contattarla telefonicamente in più occasioni, ma lei si era sempre fatta negare, filtrando le comunicazioni attraverso la segreteria telefonica, o con la complicità di qualche amica. Evidentemente, Hans era a chiedersi il perché di quel repentino cambiamento, ma Clara aveva deciso che non l'avrebbe più rivisto.

Mentre esita, nell'imbarazzo della scelta, davanti allo scaffale delle marmellate, un vocione roco alle sue spalle la fa sobbalzare: «Signorina Clara, qual buon vento!» La voce è familiare ma Clara non la riconosce di primo acchito. Basta girarsi e ..., orrore, è proprio lui, il signor Franco, più grasso e appiccicaticcio che mai.

«Che piacere rivederla. E' un po' che non viene più dalle nostre parti. Non avrà mica litigato con il signor Hans? ... E' tanto una brava persona. Ma lei viene spesso in questo supermercato? Per me è la prima volta. Avevo voglia di cambiare. Se avessi saputo che avrei potuto incontrarla qui, ci sarei venuto prima. Ho qualche domandina da farle. Posso? Non è che lei ha fretta? Vedrà che le porterò via pochissimo tempo», dice Franco.

Clara, che non ha molto da fare quella mattina, ne ha voglia di inventarsi delle scuse più o meno plausibili, si rassegna a subire l'attacco di Franco: «Mi dica. E sia succinto», gli dice.

«Devo ammettere che aveva ragione», inizia col raccontare Franco. «Il gioco del lotto non rende molto. In tutti questi anni ho speso un patrimonio. Ho provato un sacco di trucchi e di sistemi, ma non sono stato molto fortunato. Pensi che mi sono comprato anche dei costosi manuali e ho imparato ad interpretare i sogni e la *smorfia* ...»

«Venga al dunque», lo incalza Clara.

«Ebbene. Ultimamente ho concentrato tutti i miei sforzi sul gioco della *roulette*. Ancora non mi fido ad andare al casinò ... mi vergogno un pochino. Però affido settimanalmente una cifra ad un'amica di mio cognato che va spesso a Campione, e lei esegue esattamente le mie istruzioni. Finora non ho vinto quasi niente ... intendiamoci, mi fido ciecamente di questa signora, ... è solo che probabilmente non ho fatto ancora sufficiente pratica. Appena sarò pronto mi recherò personalmente al casinò, non voglio che la gente lì pensi che io sia un novellino ...»

«C'è poco da far pratica alla *roulette*; o si vince o si perde», osserva Clara deponendo il vasetto di marmellata prescelto nel carrello ancora semivuoto.

«Noo! Ma cosa crede? E' un gioco complicatissimo, c'è da scegliere fra rossi e neri, fra pari e dispari ... », spiega Franco.

«Venga al dunque», ripete Clara.

«Io ho elaborato uno schema di gioco», dice Franco abbassando la voce per non farsi sentire dal "nemico". «Come saprà, signorina Clara, il tappeto verde è diviso in sei sestine, corrispondenti ai numeri da 1 a 6, da 7 a 12, da 13 a 18, da 19 a 24, da 25 a 30, e da 31 a 36. Lo zero è a parte. Io comincio con sei *fiches* e, all'interno di ogni sestina, ne metto una su un numero pari scelto a caso. Nella giocata successiva, ripunto sul numero vincente, ammesso che ci sia; mentre modifico gli altri, rimanendo all'interno della sestina, ma cambiandone la parità. Mi spiego meglio. Supponiamo che all'inizio mi giochi i numeri: 4, 12, 14, 22, 26, 36. Supponiamo poi che esca il 12. La volta dopo potrei giocare i numeri: 1, 12, 15, 19, 29, 33. Nel caso che il 12 non fosse uscito nella prima giocata, avrei dovuto cambiare anch'esso sostituendolo con il 7, il 9, o l'11. Proseguo così, cambiando di volta in volta la parità, finchè, pian piano, sono sicuro che ad ogni giro della ruota azzeccherò un numero vincente. Cosa ne dice signorina Clara? E' un buon metodo? Se mi dà l'assenso, la settimana prossima istruisco l'amica di mio cognato perchè lo metta in pratica.»

Clara parte ad esporre il suo punto di vista: «Le ho già detto in altre occasioni che nei giochi come il lotto o la *roulette* non ci sono strategie vincenti. Tanto vale affidarsi agli astri, all'oroscopo o ai sogni. Almeno in questi casi, uno può dare delle vaghe spiegazioni divinatorie ai suoi successi. L'invenzione delle sestine, delle quartine, dei pari e dei dispari, dei rossi e dei neri, o di quant'altro, è solo un gran *bluff* per attirare gli scommettitori e rendere "interessante" un gioco che, altrimenti, sarebbe alquanto "insipido". Lei ha scelto una via arzigogolata, che, nella sostanza, è pari a quella di milioni altre. Se mi permette di discutere un caso assai più semplice, e se comprenderà il succo dei miei ragionamenti, potrà successivamente applicarli al suo stratagemma, al fine di verificare che in realtà esso non cela nulla di particolarmente furbo. Siccome ai matematici piace semplificare le cose quanto più possibile, lo studio che le propongo è quello relativo al lancio di una moneta, il consueto *testa o croce*.»

Poi, preso il suo blocchettino degli appunti, con la velocità di una vecchia telescrivente impazzita, Clara affronta l'argomento dal punto di vista tecnico: «Le faccio subito dei disegni.»

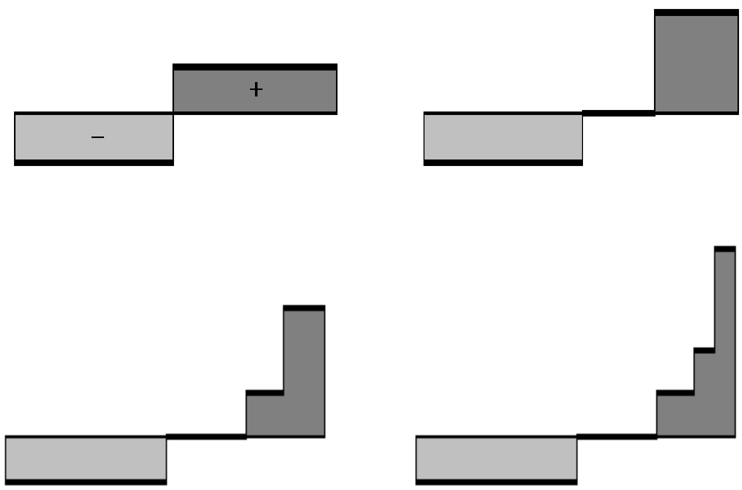
«?», si domanda intanto Franco esponendo in fuori i bulbi oculari.

Clara continua imperterrita: «L'interpretazione è la seguente. Nella prima immagine si intuisce che, dopo il primo tiro della moneta, per metà siamo sotto, cioè perdiamo, per l'altra meta abbiamo successo. In media quindi siamo in pareggio. E questo si constata anche valutando l'area della figura composta dai due rettangoli.

Se assumiamo che l'area della parte inferiore prenda valori negativi, la somma algebrica delle aree dei rettangoli è nulla. Al secondo lancio, cioè nel caso del secondo disegno, vediamo che, ciascuna delle due possibili strade che avevamo a disposizione precedentemente, si biforca. A sinistra viene rappresentata la situazione corrispondente a due perdite consecutive, a destra quella relativa a due vincite consecutive. In mezzo ci sono i due casi che portano al pareggio: perdita-vincita e vincita-perdita. Il segmento orizzontale alla base è in pratica diviso in quattro parti che rappresentano i seguenti "eventi": $(-,-),(-,+),(+,-),(+,+)$. E' interessante osservare che l'area della figura è ancora zero, se, come prima, si contano col segno meno le aree delle parti che si trovano al di sotto della linea orizzontale.

Al terzo e al quarto lancio, corrispondenti rispettivamente al terzo e al quarto disegno, la storia si complica, ma non penso ci siano difficoltà ad interpretare le figure: si va giù o su a seconda che si perda o si vinca. In particolare, nella figura relativa al terzo lancio, il grafico rappresenta gli otto eventi: $(-,-,-),(-,-,+),(-,+,-)$, $(-,+,+),(+,-,-),(+,-,+),(+,+,-),(+,+,+)$. Se continuassimo coi lanci dovremmo suddividere ulteriormente il segmento di base e i grafici si infittirebbero sempre più. Nonostante ciò, le aree positive compenseranno esattamente quelle negative, dando un bilancio globale nullo. La conseguenza è che, in questo gioco equo, nessuno è mediamente destinato a vincere o perdere.» Detto ciò Clara fulmina con lo sguardo Franco, che si era arretrato di un passo, quasi cercasse di sottrarsi alla lezione. Ma, oramai, nulla è più in grado di arrestare l'ondata di piena.

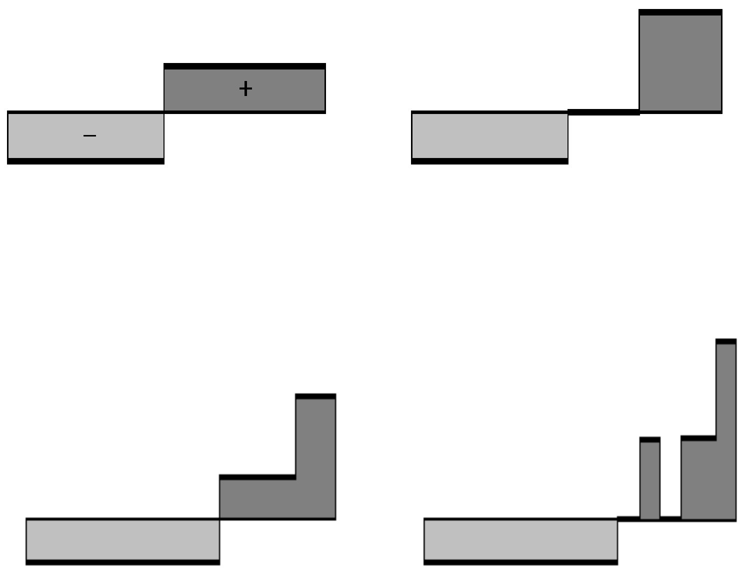
Clara riprende il discorso con perfin maggiore irruenza. «Vediamo ora se è possibile elaborare una qualche strategia per cercare di crearci un vantaggio e sbilanciare il gioco in nostro favore. La prima idea semplice semplice è quella di arrestarsi immediatamente non appena si perde, abbandonando così la competizione. Nel caso si vinca, decidiamo di proseguire. Sulla base dei disegni fatti in precedenza, se ne possono fare altri che descrivono tutte le possibili "storie" man mano che si procede coi lanci.



Ad ogni successiva biforcazione, il cammino in discesa viene lasciato, mentre si continuano ad esplorare gli altri.

Ad esempio, il terzo grafico schematizza i seguenti eventi: $(-, \times, \times)$ contato 4 volte, $(+, -, \times)$ contato 2 volte, $(+, +, -)$, $(+, +, +)$, dove il simbolo $\times$ segnala che abbiamo sospeso il gioco. Analogamente, il quarto grafico è relativo alla seguente situazione: $(-, \times, \times, \times)$ contato 8 volte, $(+, -, \times, \times)$ contato 4 volte, $(+, +, -, \times)$ contato 2 volte, $(+, +, +, -)$ e $(+, +, +, +)$. Rispetto alle figure precedenti, perdiamo la simmetria. Tuttavia, le aree positive compensano esattamente quelle negative, ed ancora la media è nulla. E' pur vero che in fondo a destra c'è il caso del giocatore che continua a vincere e, pertanto, rimane in gioco, ma ve ne sono molti altri che abbandonano anzitempo, a puro vantaggio di chi tiene il banco, che intanto si incamera il pegno delle loro sconfitte.

Similmente, possiamo analizzare la strategia che ci conduce a lasciare il gioco non appena andiamo col conto in rosso. Possiamo far riferimento alle seguenti figure, dove, tanto per chiarirsi, il terzo grafico riproduce gli eventi: $(-, \times, \times)$ contato 4 volte, $(+, -, -), (+, -, +)$, $(+, +, -)$, $(+, +, +)$. Al quarto lancio, il caso $(+, -, -)$ verrà interrotto, poiché siamo già in rosso.

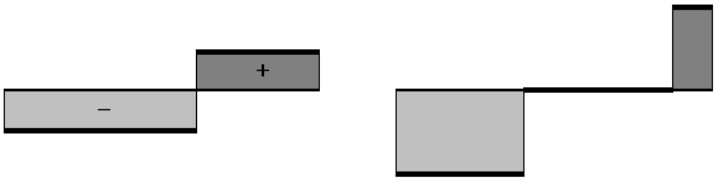


La differenza è che ora si può rischiare di perdere più volte, purchè si sia accumulato sufficiente denaro da vincite precedenti. Cautelati da ciò si può giocare più a lungo, ma, sempre ragionando sulla media, le poche situazioni di forte vincita sono bilanciate da molti casi di abbandono. Questa proprietà è ancora una volta testimoniata dall'esatta compensazione di aree positive e negative. Naturalmente si possono inventare altri modi di affrontare il gioco, anche se la fantasia viene un po' a mancare non potendo disporre di tutte quelle varianti che caratterizzano il gioco della *roulette*. Queste ultime rendono accattivante la partecipazione al tavolo di gioco, ma sono rette tuttavia dalle stesse regole che abbiamo esaminato sinora. Se, come a *testa o croce*, il gioco è equo, qualsiasi tentativo per cercare di favorire uno dei contendenti, che non si basi sulla conoscenza del futuro, è destinato a fallire. Si può infatti dimostrare matematicamente che le aree delle figure che descrivono i vari eventi rimangono sempre nulle. Lo stesso si può dire della *roulette* quando si elimina lo zero e si chiede al banco di rimborsare le vincite in modo proporzionale a $\frac{36}{36}$, invece dei consueti $\frac{36}{37}$. In tale circostanza il gioco è equo, ed equo rimane indipendentemente dai trucchi escogitati, purchè non si corrompa il *croupier* o si metta la leggendaria calamita sotto la ruota. Ma! Signor Franco mi sta ascoltando?»

In effetti Franco sembra stia pensando ad altro. Col fazzoletto alla tempia si asciuga il sudore gocciolante, mentre gli occhi roteano quasi fosse sul punto di svenire. «Certo, certo, la ascolto», dice con voce strozzata.

Basta questo *input* per riattivare Clara. Non è chiaro se lo faccia per innato feroce cinismo o se intenzionalmente voglia liberarsi dell'omone una volta per tutte.

«E se il gioco è iniquo, iniquo rimane», dice riprendendo. «Con una moneta "truccata", si può ipotizzare che nei risultati predomini la parte negativa e le cose peggiorino andando avanti. Nei primi due lanci si potrebbe realizzare la situazione seguente:



Senza invece far ricorso ad imbrogli, un simile prospetto può essere ottenuto quando, vedi l'esempio del casinò, il banco paga le vincite trattenendosene una parte. Non ci sono alterazioni illecite della ruota (almeno si spera!), tuttavia il gioco è mediamente svantaggioso per il cliente.

Ma non vorrei insistere ulteriormente. Penso che oggi si sia messa abbastanza carne sul fuoco, anche se avrei mille altri risultati interessanti da esporle. Tenga pure questi foglietti. Se li studi con comodo a casa. Per esercizio la invito ad sviluppare l'ultimo esempio, così come è stato fatto per la moneta non truccata. Sono sicuro che con la dovuta pazienza sarà in grado di trovare le analogie con il gioco della *roulette*», dice Clara porgendo le sue scartoffie a Franco, il quale ondeggia pericolosamente, al limite dell'equilibrio, sulle gambe tremolanti.

«Beh! La-la ringrazio si-signorina Clara», risponde Franco ansimante, nell'atto di congedarsi. «E' stata molto gentile a da-darmi consulenza. Non la disturberò ulteriormente. So-sono sicuro che avrà un'esagerazione di cose da fare. Ma-magari un'altra volta ... con un po' più di calma, le-le porrò qualche altra que-questione.»

«Ci vediamo», risponde lei.

Avviandosi di fretta verso la corsia dei surgelati, Clara matura la convinzione che in quel supermercato non ci avrebbe più messo piede.

Qualche secondo dopo, s'ode un tonfo accompagnato dal rumore di barattoli di conserve che vanno in frantumi. Due anziane signore accorrono in aiuto di Franco, in evidente stato di difficoltà.

—— ♠ ——

8

Rispetto alla scorsa edizione, le avventure di Clara sono state questa volta più movimentate. In aggiunta, ai nostri lettori dal palato più esigente, in cerca ancora di argomenti su cui meditare, proponiano la seguente breve storiella.

Se e non fosse e

Una mattina, il sovrano illuminato di Algebran, colto da una delle sue solite smanie filosofiche, invitò a corte uno fra i più istruiti matematici del suo regno, Messere Logàrit, per esporgli alcune delle sue incertezze. La conversazione fra i due si sviluppò rapidamente. Ecco parte del loro dialogo.

Re: Mio stimato cortigiano, vorrei attirare la vostra attenzione sul numero e.

Messere Logàrit (ML): Intendete dire il numero di Nepero, Altezza?

Re: Esattamente! Se la mia vecchia mente non è del tutto offuscata, il valore di tale numero dovrebbe aggirarsi intorno a 2,7.

ML: (*baldanzoso*) Più correttamente 2,7182818285 ... e così via all'infinito, senza regole apparenti.

Re: Ammiro la vostra precisione, ma è di poca importanza per quello che sto per dirvi. E' il fatto che e sia compreso fra 2 e 10 ciò che mi rende perplesso.

ML: (*stupito*) Ma mio Signore! E' un dubbio infondato quello che vi angustia. E' poco rilevante che il valore di e sia e oppure 3741529,2 ... o chissà che altro; le mille affascinanti proprietà di cui esso gode non verrebbero minimamente intaccate.

Re: Ne siete proprio certo? Penso invece che le cose stiano in un altro modo. I matematici sono sicuramente molto abili nel trattare entità astratte, ma spesso la realtà di questo mondo rende vani i loro ragionamenti, anche se logicamente corretti. Vi siete mai domandato che cosa sarebbe accaduto se il valore di e fosse stato 429211307?

ML: (*visibilmente turbato*) Per quanto mi riguarda sarebbe sempre rimasto e.

Re: Cercherò di darvi un esempio di come vi ingannate. Supponiamo che e valga 429211307 ed esaminiamo cosa succede ad e^x per valori grandi di x. Dopo un certo x, e^x sarà così grande che cesserà di esistere.

ML: (*sconcertato*) Assurdo! e^x esiste per qualsiasi valore di x.

Re: (*tranquillo*) Oh, ma per degli x molto grandi i valori di e^x esisteranno nella vostra testa ... non più nella realtà. Nessuno, che io sappia, è in grado di esprimere numeri molto grandi. Certo si è liberi di pensare che essi esistano, ma già voi stesso non sareste capace di scrivere per esteso $429211307^{7524393}$!

ML: (*spazientito*) Ma l'espressione numerica di $429211307^{7524393}$ corrisponde a $429211307^{7524393}$ stesso!

Re: (*con fare provocatorio*) Simboli! Niente altro che simboli! Andrà a genio a voi tale inganno! Nel mio regno, coloro che non sono pratici delle trappole della matematica, i numeri li vogliono vedere ben chiari. Ma vorrei insistere ancora su questo esempio. Se ora prendiamo x grande ma negativo, il corrispondente e^x sarà sicuramente 0. Nessuno è in grado di esprimere altrimenti numeri come $1/429211307^{410025}$. E ancora, supponiamo che si abbia $e = 1,0000028$; potremmo considerare e^x per molti valori di x, ma per quelli che sono correntemente di nostro uso, detto e^x è costantemente uguale ad 1.

ML: (*estremamente mortificato*) Con tutto il rispetto per la Signoria Vostra, continuo a giudicare insostenibile ciò che Voi affermate. Inoltre non riesco ad intendere dove vogliano condurre le Vostre argomentazioni.

Re: A questo punto dovrebbe essere lampante che, una volta fissato il nostro sistema di numerazione, per poter apprezzare l'importanza di e bisogna che esso debba necessariamente cadere a mezza via fra 1 e l'infinito. La posizione che attualmente occupa mi sembra fra le più favorevoli ... tra 2 e 10. Ottima scelta!

ML: (*in un filo di voce*) Ma e non è una scelta!

Re: (*senza curarsi del suo interlocutore*) Ottima scelta veramente! Come pure π o la costante γ di Eulero. Ottime scelte! Tutte quantità vicine, si possono confrontare l'una con l'altra senza che intervengano i numeri grandi o quelli piccoli. Chissà chi ha escogitato tutto ciò?

ML: (*annaspando*) Non ha senso! Non ha senso, π è π, γ è γ, la loro essenza sta nella loro definizione, null'altro che nella loro definizione. Tutti i numeri sono indistinguibili ... non ha senso parlare di quelli grandi o di quelli piccoli ...

Mentre la sua voce si spegneva Messere Logàrit avvilito pensava: "Il Re, approfittando della sua posizione, vuole farmi ammettere cose che la mia mente rifiuta".

La conversazione terminò a notte fonda. Il Re stanco andò a dormire portandosi nei sogni i suoi dubbi irrisolti. Messere Logàrit prese la via di casa brontolando ad alta voce per le campagne. Mai prima d'allora gli era capitato che la sua scienza fosse denigrata a tal punto.