3

Equazioni Differenziali Ordinarie ai Dati al Contorno

3.1 Un primo approccio al problema

L'analisi portata a termine nel precedente capitolo può essere estesa all'equazione differenziale del secondo ordine:

$$u''(x) = F(x, u(x), u'(x)) \qquad x \in]a, b[\tag{3.1.1}$$

qualora siano assegnate ad u delle condizioni ad un estremo dell'intervallo $[a, b]$, quali ad esempio: $u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \beta$ ([23]). Basta infatti prendere atto del cambiamento di variabile $v(x) = u'(x), \ x \in [a, b]$, e affrontare successivamente il sistema differenziale:

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) & x \in]a, b[\\ v'(x) = F(x, u(x), v(x)) & x \in]a, b[\\ u(a) = \alpha \\ v(a) = \beta \end{cases} \tag{3.1.2}$$

La situazione cambia drasticamente quando, come suggerito in numerose applicazioni ([24]), vengono assegnate all'incognita u di (3.1.1) delle condizioni *al contorno*, come ad esempio le seguenti

$$u(a) = \alpha \qquad u(b) = \beta \tag{3.1.3}$$

([23]) Si pensi all'equazione del pendolo $u''(x) = -\text{sen}u(x)$, ove siano assegnate la posizione e la velocità all'istante iniziale.

([24]) Un classico esempio è quello dell'individuazione del potenziale elettrico all'interno di una barra di materiale dielettrico, una volta noti i valori di detto potenziale alle due estremità.

Il tal caso il problema differenziale non è più riconducibile ad un sistema differenziale ai dati iniziali come quelli già studiati. Occorre dunque delineare nuove metodologie per quanto riguarda, sia l'analisi teorica, che la stesura di opportuni algoritmi di approssimazione. Sarà questo principalmente il tema dell'attuale capitolo.

Anche per problemi del secondo ordine ai dati al contorno, le soluzioni possono talvolta essere viste come punti fissi di un qualche funzionale. Se, per esempio, F in (3.1.1) dipende solo da u, allora l'incognita soddisfa $u = TF(u)$, dove T è l'operatore che, ad una data funzione w, assegna la soluzione dell'equazione $v'' = w$ in $]a, b[$, soddisfacente $v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta$. Questa impostazione, punto di partenza per certi studi teorici, comporta evidentemente molte implicazioni interessanti anche dal punto di vista dell'Analisi Numerica.

Per trovare la soluzione di (3.1.1), soggetta alle condizioni (3.1.3), una procedura iterativa, nota come metodo di *shooting*, permette di sfruttare le tecniche sviluppate per le equazioni ai dati inziali. Tale approccio, che ora illustreremo brevemente, può essere anche di aiuto per l'analisi dell'esistenza e dell'unicità della soluzione u.
Si considera l'applicazione $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che, a un dato $\gamma \in \mathbf{R}$, associa il valore assunto in b dalla soluzione u_γ del problema di Cauchy

$$\text{(3.1.4)} \qquad \begin{cases} u''_\gamma(x) &= F(x, u_\gamma(x), u'_\gamma(x)) \qquad\qquad x \in]a, b] \\ u_\gamma(a) &= \alpha \\ u'_\gamma(a) &= \gamma \end{cases}$$

la cui risoluzione si riconduce a quella di un sistema analogo a (3.1.2).
Si deve cercare poi il valore $\hat{\gamma}$, la cui esistenza e unicità sono da dimostrarsi in relazione alle proprietà di F, tale per cui $G(\hat{\gamma}) = u_{\hat{\gamma}}(b) = \beta$. Si tratta quindi di dosare la velocità iniziale γ nel sistema dinamico (3.1.4), in modo che la traiettoria centri il bersaglio, nel piano (x, y), costituito da punto (b, β). Operativamente, questo può essere fatto con una qualunque delle tecniche viste nel paragrafo 2.3. Si noti che è tutt'altro che facile fornire delle limitazioni superiori ed inferiori a $\hat{\gamma}$, al fine di procedere all'inizializzazione di tali algoritmi. Nella pratica, il calcolo di $u_\gamma(b)$, per un dato $\gamma \in \mathbf{R}$, viene eseguito in modo approssimato in abbinamento ad uno dei metodi già studiati per i problemi ai dati iniziali.

Visti gli alti costi di implementazione, e la difficoltà di estendere la suddetta procedura a problemi ai dati al contorno per equazioni alle derivate parziali, si preferisce ricorrere ad altre tecniche di calcolo, che verranno esaminate nei prossimi paragrafi. A sfavore ancora del metodo di *shooting*, va aggiunto che in esso si recepiscono in modo innaturale le condizioni al contorno, stravolgendo le ragioni fisiche da cui derivano.

3.2 Impostazione del problema in forma variazionale

Prendendo in prestito dalla Fisica Matematica alcune nozioni fondamentali, saremo in grado di dare un'altra veste al problema differenziale, aprendo così nuovi orizzonti di indagine. Svolgeremo una serie di passaggi senza curare troppo la forma, lasciando la loro verifica rigorosa al lettore, sulla base del materiale facilmente reperibile in vari testi di Analisi. Per comodità supporremo che la funzione F in (3.1.1) dipenda solo dalle variabili x e u.
Si introduce dapprima la funzione *Lagrangiana* $\mathcal{L}(x, w, w') = \frac{1}{2}[w']^2 + H(x, w)$, dove H è una primitiva di F rispetto alla variabile u, e l'argomento w appartiene ad una famiglia di funzioni sufficientemente regolari soddisfacenti $w(a) = \alpha$ e $w(b) = \beta$.
Grazie ad un principio di *Hamilton*, soluzioni fisiche interessanti si trovano in corrispondenza del minimo:

$$\int_a^b \mathcal{L}(x, u(x), u'(x))\ dx \ = \min_{\substack{\text{al variare di } w \\ \text{con le condizioni} \\ w(a)=\alpha \ \ w(b)=\beta}} \int_a^b \mathcal{L}(x, w(x), w'(x))\ dx \tag{3.2.1}$$

Con tecniche di Calcolo delle Variazioni, dal problema di minimo (3.2.1) si può passare alla seguente *equazione variazionale*:

$$\int_a^b u'(x)\psi'(x)\ dx \ + \ \int_a^b F(x, u(x))\ \psi(x)\ dx \ = \ 0 \tag{3.2.2}$$

valida per ogni funzione ψ tale per cui $\psi(a) = \psi(b) = 0$.
Basta infatti scrivere $w = u + \lambda\psi$, dove $\lambda \in \mathbf{R}$. La relazione (3.2.2) si ottiene poi imponendo che, in corrispondenza a $\lambda = 0$, valga l'uguaglianza

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b \mathcal{L}(x, u + \lambda\psi, u' + \lambda\psi')\ dx \ = \ 0 \tag{3.2.3}$$

(si confronti la procedura con quella impostata nell'esercizio 16 del paragrafo 1.9).
Mediante integrazione per parti, ricordando che $\psi(a) = \psi(b) = 0$, l'equazione (3.2.2) implica successivamente

$$\int_a^b \Big[-u''(x) \ + \ F(x, u(x)) \Big] \psi(x) \ dx \ = \ 0 \tag{3.2.4}$$

Grazie all'arbitrarietà di ψ si scopre che (3.2.4) è valida se e solo se u soddisfa l'*equazione di Eulero* $u''(x) = F(x, u(x)),\ x \in]a, b[$, con le condizioni $u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta$, cioè il problema con i dati al contorno che avevamo in mente di studiare sin dall'inizio.

Oltre che a spiegare l'origine dal punto di vista fisico di molti problemi differenziali, il problema di minimo (3.2.1) e, in particolare, l'equazione (3.2.2), suggeriscono vie alternative per lo studio dell'incognita u. Il fatto di caratterizzare u mediante (3.2.2), combinato con l'individuazione di opportuni spazi funzionali e l'introduzione del concetto di soluzione in *forma debole*, hanno permesso il proliferare di nuove ed eleganti teorie per lo studio dell'esistenza e dell'unicità di u. Sebbene l'argomento sia interessante non avremo qui il tempo per svilupparlo, ma ne faremo solo un rapido accenno.

Come sempre, un ruolo di primo piano sarà giuocato dal caso lineare, nel quale definiamo $F(x, u) = \mu(x)u - f(x)$ (si avrà di conseguenza: $H(x, u) = \frac{1}{2}\mu(x)u^2 - f(x)u$), avendo assegnato le due funzioni $\mu \geq 0$ ed f.
Ricaviamo perciò il problema differenziale del secondo ordine

$$\begin{cases} -u''(x) \ + \ \mu(x)u(x) \ = \ f(x) \qquad x \in]a, b[\\ \\ u(a) \ = \ \alpha \qquad\quad u(b) \ = \ \beta \end{cases} \tag{3.2.5}$$

il cui analogo in forma variazionale è

$$\int_a^b u'(x)\psi'(x) \ dx \ + \ \int_a^b \mu(x)u(x)\psi(x) \ dx \ = \ \int_a^b f(x)\psi(x) \ dx \tag{3.2.6}$$

Osserviamo che non è restrittivo supporre che i parametri α e β siano entrambi nulli. Se così non fosse, basterà sostituire ad u la funzione $u - r$, dove r è la retta passante per i punti (a, α) e (b, β), modificando adeguatamente il termine noto f. Assumeremo perciò, da ora in poi, l'ipotesi: $\alpha = \beta = 0$.

Se indichiamo con $\mathbf{X}$ lo spazio funzionale $\{\psi \in C^\infty([a,b]),\ \psi(a) = \psi(b) = 0\}$, si può scrivere (3.2.6) in maniera compatta

$$B(u,\psi) \ = \ \mathcal{F}(\psi) \qquad \forall \psi \in \mathbf{X} \tag{3.2.7}$$

dove $B : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$, data da $B(u,\psi) = \int_a^b (u'\psi' + \mu u\psi)dx$, è una *forma bilineare* simmetrica e definita positiva (cioè: $B(u,u) \geq 0$, con $B(u,u) = 0$ se e solo se u è la funzione nulla). Inoltre $\mathcal{F} : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$, dato da $\mathcal{F}(\psi) = \int_a^b f\psi dx$, è un funzionale lineare. Con qualche opportuna precisazione, facendo uso dell'integrazione alla Lebesgue e di funzioni derivabili nel senso delle *distribuzioni*, un'analisi teorica di (3.2.7) è subito disponibile ([25]). Vedremo di far tesoro di quanto accennato in questo paragrafo, al fine di costruire dei metodi di approssimazione che fanno capo a (3.2.7).

3.3 Il metodo di Galerkin

Vogliamo ora approssimare la soluzione u del problema (3.2.6). Come specificato nel precedente paragrafo, supporremo che: $\alpha = \beta = 0$. Occorre introdurre prima uno spazio funzionale $\mathbf{X}_d$ di dimensione finita d. Alle funzioni di $\mathbf{X}_d$ verrà richiesto di annullarsi agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Ci riserviamo di decidere successivamente come saranno dette funzioni; per il momento manteniamo la discussione ad un livello astratto.
Il metodo di *Galerkin* consiste nel cercare un'approssimazione $u_d \in \mathbf{X}_d$ della funzione u, in modo che soddisfi

$$\int_a^b u_d'(x)\psi'(x)\ dx \ + \ \int_a^b \mu(x)u_d(x)\psi(x)\ dx \ = \ \int_a^b f(x)\psi(x)\ dx \tag{3.3.1}$$

qualsiasi sia $\psi \in \mathbf{X}_d$. Si noti che, rispetto a (3.2.6), è stato cambiato lo spazio di appartenenza delle funzioni ψ, dette anche *funzioni test*, che è diventato ora di dimensione finita.

([25]) Se B rappresenta un prodotto scalare per lo spazio di Hilbert $\mathbf{Y}$ ed $\mathcal{F}$ è un funzionale continuo su $\mathbf{Y}$, l'esistenza e l'unicità della soluzione $u \in \mathbf{Y}$ di (3.2.7) sono assicurate da un teorema di rappresentazione di *Riesz*. Nel nostro caso $\mathbf{Y}$ è la chiusura dello spazio $\mathbf{X}$, relativamente alla topologia indotta dal prodotto scalare B. Questo consente di dire che u è approssimabile (in maniera uniforme) con funzioni di $\mathbf{X}$. Nel caso in cui la funzione u sia abbastanza regolare (cioè, con derivata seconda continua), essa soddisfa anche il problema in *forma forte* (3.2.5) con $\alpha = \beta = 0$.

La prima cosa che faremo è di verificare che l'equazione (3.3.1) è equivalente ad un sistema lineare. Prendiamo a piacere una base $\{\phi_k\}_{1\leq k\leq d}$ dello spazio $\mathbf{X}_d$, e cominciamo ad osservare che, affinche (3.3.1) sia vera, è sufficiente prendere $\psi = \phi_i,\ \forall i = 1, ..., d$. Difatti, se la relazione risulta essere soddisfatta prendendo gli elementi della base come funzioni test, essa sarà vera per tutte le funzioni $\psi \in \mathbf{X}_d$ che sono combinazioni lineari di questi elementi. Pertanto, (3.3.1) è univocamente caratterizzabile mediante d equazioni lineari. Se poi scriviamo $u_d = \sum_{j=1}^{d} c_j\phi_j$, dove i coefficienti $c_j,\ j = 1, ..., d$ sono da determinare, perveniamo alla seguente scrittura

$$\sum_{j=1}^{d}\left\{\int_a^b [\phi_j'\phi_i' + \mu\phi_j\phi_i]dx\right\}c_j = \int_a^b f\phi_i\, dx \tag{3.3.2}$$

che rappresenta in effetti un sistema lineare a d equazioni e d incognite, dove il vettore incognito contiene i coefficienti $c_j\ j = 1, ..., d$, il vettore dei termini noti contiene le quantità $\int_a^b f\phi_i dx\ \ i = 1, ..., d$, e la matrice è costituita dai seguenti elementi: $\int_a^b [\phi_j'\phi_i' + \mu\phi_j\phi_i]dx$, con i e j che variano da 1 a d.

Per poter proseguire oltre bisogna conoscere più dettagliatamente com'è fatto lo spazio $\mathbf{X}_d$ e come viene scelta in esso la base, cosa che faremo nei prossimi paragrafi. Possiamo nel frattempo cercare di comprendere in che senso si debba intendere che u_d sia un'approssimazione di u. Intanto osserviamo che il sistema lineare corrispondente a (3.3.2) ha sicuramente un'unica soluzione. Basta notare che la forma bilineare, introdotta in (3.2.7), è definita positiva anche nello spazio $\mathbf{X}_d$. Questo permette di concludere che gli autovalori della matrice del sistema lineare sono reali e strettamente positivi, e dunque che il determinante della matrice stessa non è nullo. Denotiamo con $< \cdot, \cdot >_B$ e $\|\cdot\|_B$ rispettivamente il prodotto scalare e la norma individuati da B. Non è difficile costatare che

$$< u - u_d,\ \phi >_B = 0 \qquad \text{per tutte le funzioni } \phi \in \mathbf{X}_d \tag{3.3.3}$$

Quindi, in virtù di (1.6.2), u_d è la proiezione ortogonale di u sullo spazio $\mathbf{X}_d$. Ne risulta che u_d minimizza la distanza (indotta dalla norma $\|\cdot\|_B$) dalla funzione u, nell'ambito di tutte le funzioni appartenenti a $\mathbf{X}_d$. Quanto meglio le funzioni di $\mathbf{X}_d$ sono in grado di approssimare u, tanto più vicina sarà u_d ad u. E' compito dell'Analisi Funzionale stabilire il grado di parentela della norma $\|\cdot\|_B$ con altre norme classiche, quale ad esempio quella relativa alla

convergenza uniforme, in modo da quantificare con più esattezza il tipo di convergenza che ci si può attendere, al crescere della dimensione d ([26]).

In maniera analoga, ovviamente con maggiori difficoltà, si affronta l'approssimazione della soluzione del problema non lineare (3.2.2).

3.4 I metodi degli elementi finiti e delle differenze finite

Studiamo il sistema lineare (3.3.2) esaminando un caso specifico. Per iniziare, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ mediante gli $n + 1$ nodi equispaziati definiti in (1.1.2). Lo spazio a dimensione finita $\mathbf{X}_d$ sarà quello delle funzioni continue e lineari a tratti che si annullano in a e in b. Dunque $\mathbf{X}_d$ ha dimensione $d = n - 1$ ed è un sottoinsieme dello spazio $S_1^{(n)}$ definito in (1.3.1) ([27]).
La base con cui lavoreremo sarà costituita dalle funzioni $\phi_k \quad k = 1, ..., d$, tali per cui:

$$\phi_k(x_i^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{per } \; i = 0, ..., n \;\; \text{con } \; i \neq k \\ \\ 1 & \text{per } \; i = k \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Con questa scelta, i coefficienti incogniti nel sistema lineare (3.3.2) rappresentano i valori che la funzione u_d assume in corrispondenza ai nodi, cioè: $c_j = u_d(x_j^{(n)})$ per $\; j = 1, ..., n - 1$ (si osservi che $u_d(x_0^{(n)}) = u_d(x_n^{(n)}) = 0$). In figura 3.4.1 mostriamo il grafico di ϕ_k. Detta tecnica di approssimazione è chiamata degli *elementi finiti*.
Non resta che calcolare i coefficienti della matrice, detta anche *matrice di rigidità*. Visto che il prodotto tra ϕ_i e ϕ_j, come pure quello tra ϕ_i' e ϕ_j', è nullo se $\; |i - j| > 1$, la matrice risulta essere *tridiagonale*. Inoltre, sappiamo che è simmetrica. E' sufficiente dunque stimare $\int_a^b \left([\phi_i']^2 + \mu[\phi_i]^2\right) dx$ e $\int_a^b \left(\phi_i'\phi_{i-1}' +\right.$

([26]) Nel caso in questione, B induce una norma equivalente a quella dello spazio di Sobolev $H_0^1(a, b)$. Grazie a noti teoremi di *immersione*, ne consegue che la convergenza di u_d ad u, per $d \to +\infty$, è uniforme, sempre che gli spazi $\mathbf{X}_d$ $d \geq 1$, siano stati scelti in modo corretto.

([27]) L'insieme $\mathbf{X}_d$ viene ad essere un sottospazio dello spazio di Hilbert $\mathbf{Y}$, chiusura di $\mathbf{X}$, con il prodotto scalare determinato dalla forma bilineare B in (3.2.7). A tale spazio appartiene anche la soluzione u del problema in forma variazionale.

$\mu\phi_i\phi_{i-1}\big)dx$ (si noti che il fatto che ϕ_i non sia derivabile in alcuni nodi, non ha rilevanza nel calcolo di questi integrali ([28])).

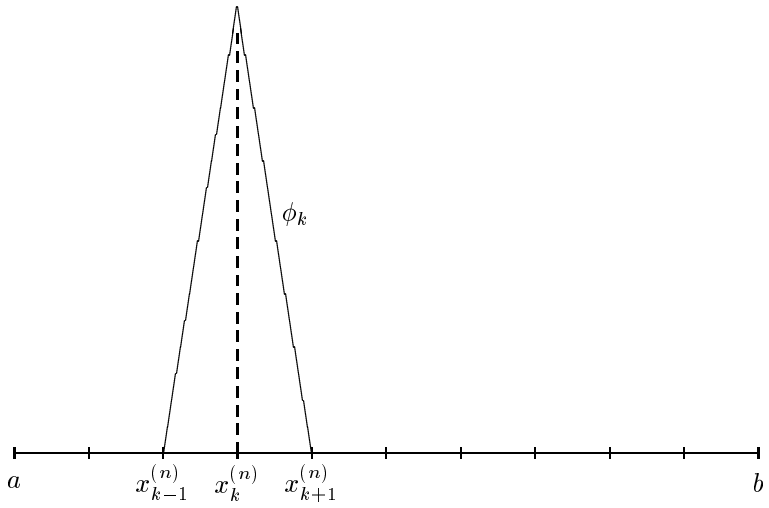

Figura 3.4.1 - *Un elemento della base di* $\mathbf{X}_d \subset S_1^{(n)}$.

Ammettendo per semplicità che μ sia costante, otteniamo:

$$\int_a^b \big([\phi_i']^2 + \mu[\phi_i]^2\big)dx \;=\; \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \big([\phi_i']^2 + \mu[\phi_i]^2\big)dx \;=\; \frac{2}{h} + \mu\frac{2h}{3} \tag{3.4.2}$$

$$\int_a^b \big(\phi_i'\phi_{i-1}' + \mu\phi_i\phi_{i-1}\big)dx = \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} \big(\phi_i'\phi_{i-1}' + \mu\phi_i\phi_{i-1}\big)dx = -\frac{1}{h} + \mu\frac{h}{6} \tag{3.4.3}$$

([28]) Questo è uno dei vantaggi dell'approccio di tipo variazionale. Le funzioni di $\mathbf{X}_d$ non ammettono derivata seconda. Conseguentemente, il problema differenziale (3.2.5) è difficilmente abbordabile in $\mathbf{X}_d$. D'altro canto, alle soluzioni in forma debole del problema non è richiesto di possedere derivate di ordine superiore al primo.

Se $\mu = 0$, la struttura della matrice appare come segue:

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

La si confronti con la matrice in (2.5.11).

Pertanto, posto $\zeta_j^{(n)} = u_d(x_j^{(n)})$ per $j = 0, ..., n$, l'equazione (3.3.2) diventa

$$\frac{-\zeta_{i+1}^{(n)} + 2\zeta_i^{(n)} - \zeta_{i-1}^{(n)}}{h} + \tfrac{1}{6}\mu h\left(\zeta_{i+1}^{(n)} + 4\zeta_i^{(n)} + \zeta_{i-1}^{(n)}\right) = \int_a^b f\phi_i \, dx \tag{3.4.5}$$

con le condizioni al contorno espresse dalla relazione: $\zeta_0^{(n)} = \zeta_n^{(n)} = 0$. La funzione lineare a tratti u_d, i cui valori nei nodi soddisfano (3.4.5), approssima la soluzione u del problema differenziale (3.2.5). Si dimostra che u_d converge ad u uniformemente quando d tende ad infinito. Nell'ipotesi in cui u sia abbastanza regolare (basta che u'' esista quasi ovunque e che $u'' \in L^2(a,b)$), l'errore $\|u - u_d\|_B$ converge a zero linearmente (cioè proporzionalmente ad h, dove $h = (b-a)/n$), mentre l'errore $\max_{x\in[a,b]} |u(x) - u_d(x)|$ converge a zero anche più velocemente (quasi quadraticamente). Infine, l'errore $\|u - u_d\|_{L^2(a,b)}$ converge a zero come h^2. Ricordiamo che, a causa di (3.3.3), u_d risulta essere la migliore approssimazione di u in $\mathbf{X}_d$ (si presti però attenzione al fatto che u_d non è l'interpolante di u nei nodi). L'analisi della convergenza consiste quindi nel valutare con quanta accuratezza una funzione possa essere approssimata, con la norma $\|\cdot\|_B$, mediante funzioni appartenenti a $\mathbf{X}_d$. Una nozione fondamentale, necessaria allo studio teorico, è quella di *stabilità*. Tale concetto viene abitualmente espresso richiedendo l'esistenza di una costante $C > 0$ tale per cui $\|u_d\|_B < C \ \ \forall d$, proprietà che è puntualmente verificata in tutti gli esempi che qui considereremo.

Purtroppo, capita molto spesso che l'integrale, che compare a destra del segno di uguaglianza in (3.4.5), non si possa calcolare esplicitamente, dovendo quindi ricorrere a formule di quadratura. Proponiamo un paio di alternative. Nel primo caso consideriamo

$$\int_a^b f\phi_i \, dx = \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f\phi_i \, dx \approx hf(x_i^{(n)}) \tag{3.4.6}$$

con $h = (b-a)/n$. Nel secondo caso, sostituiamo ad f la sua funzione interpolante lineare a tratti, ottenendo dunque

$$(3.4.7)\quad \int_a^b f\phi_i\ dx\ =\ \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f\phi_i\ dx\ \approx\ \tfrac{1}{6}h\Big(f(x_{i-1}^{(n)})+4f(x_i^{(n)})+f(x_{i+1}^{(n)})\Big)$$

Sebbene questa formula sembri più sofisticata della precedente, esse hanno entrambe il medesimo comportamento asintotico per $h \to 0$. Rimpiazzando il termine noto in (3.4.5) con l'espressione suggerita da (3.4.7), si ricava un nuovo metodo di approssimazione, che è la versione del metodo degli elementi finiti più spesso utilizzata.

Usando invece la formula di quadratura in (3.4.6) anche per l'integrale $\int_a^b \mu u_d\phi_i dx \approx h\mu(x_i^{(n)})u_d(x_i^{(n)})$, otteniamo il metodo delle *differenze finite*, che è una delle prime tecniche proposte per la discretizzazione di equazioni differenziali ai dati al contorno. Esso si basa sul seguente sistema di equazioni:

$$(3.4.8)\qquad -\ \frac{\zeta_{i+1}^{(n)}-2\zeta_i^{(n)}+\zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2}\ +\ \mu(x_i^{(n)})\ \zeta_i^{(n)}\ =\ f(x_i^{(n)})$$

per $i = 1, ..., n-1$, con $\zeta_0^{(n)} = \zeta_n^{(n)} = 0$.
A parte la parentela con il metodo di Galerkin, esistono diverse altre maniere di giustificare l'espressione (3.4.8). Per esempio, se per ogni $i = 1, ..., d$, si considera la parabola p_i passante per i punti $(x_{i-1}^{(n)}, \zeta_{i-1}^{(n)})$, $(x_i^{(n)}, \zeta_i^{(n)})$, $(x_{i+1}^{(n)}, \zeta_{i+1}^{(n)})$, allora si può dedurre (3.4.8) imponendo che p_i soddisfi esattamente l'equazione differenziale nel punto $x_i^{(n)}$, cioè: $-p_i''(x_i^{(n)}) + \mu(x_i^{(n)})p_i(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$.
Questo approccio non fa uso del problema in forma variazionale, ma affronta in modo diretto il calcolo delle derivate. Ai valori approssimanti viene richiesto di soddisfare un problema differenziale simile a (3.2.5), dove le derivate seconde sono sostituite da doppi rapporti incrementali, come appare evidente dall'uguaglianza

$$(3.4.9)\qquad \frac{\zeta_{i+1}^{(n)}-2\zeta_i^{(n)}+\zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2}\ =\ \frac{1}{h}\left[\frac{\zeta_{i+1}^{(n)}-\zeta_i^{(n)}}{h}\ -\ \frac{\zeta_i^{(n)}-\zeta_{i-1}^{(n)}}{h}\right]$$

Si tenga anche presente che, per un'assegnata funzione regolare g, vale la relazione

$$(3.4.10)\quad g''(x_i^{(n)})\ =\ \frac{1}{h^2}\Big[g(x_{i+1}^{(n)})-2g(x_i^{(n)})+g(x_{i-1}^{(n)})\Big]\ -\ \frac{h^2}{12}g^{IV}(x_i^{(n)})+o(h^2)$$

ricavabile mediante sviluppi di Taylor.
Un modo alternativo per verificare che la matrice (3.4.4) è definita positiva, consiste nell'osservare che

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\zeta_{i+1}^{(n)} - 2\zeta_i^{(n)} + \zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2}\, \zeta_i^{(n)} = \tag{3.4.11}$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\zeta_{i+1}^{(n)} - \zeta_i^{(n)}}{h^2} \zeta_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\zeta_i^{(n)} - \zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2} \zeta_i^{(n)} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\zeta_i^{(n)} - \zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2} \zeta_{i-1}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\zeta_i^{(n)} - \zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2} \zeta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\zeta_i^{(n)} - \zeta_{i-1}^{(n)}}{h} \right)^2 \geq 0$$

dove è stato sfruttato il fatto che $\zeta_0^{(n)} = \zeta_n^{(n)} = 0$. La catena di uguaglianze in (3.4.11) ricorda, piuttosto marcatamente, l'integrazione per parti: $-\int_a^b u'' u dx = \int_a^b [u']^2 dx$, con $u(a) = u(b) = 0$.

Sia nel metodo degli elementi finiti che in quello delle differenze finite, la relazione (3.3.3) non è più valida. Tuttavia, con l'aggiunta di termini correttivi, che tengano conto dell'errore connesso alla sostituzione degli integrali con le formule di quadratura, non è difficile fornire stime di convergenza, generalizzando le stesse dimostrazioni valide per lo studio teorico del metodo di Galerkin puro e semplice. Si scopre che i vari metodi qui proposti hanno il medesimo comportamento asintotico per $d \to +\infty$. Non è difficile, infine, adattare quanto detto sinora al caso in cui la partizione dell'intervallo $[a, b]$ non venga effettuata mediante nodi equispaziati.

Lo spazio delle funzioni lineari a tratti, non è il solo disponibile per la costruzione di metodi di discretizzazione basati sul metodo di Galerkin, o sulle sue varianti. Un altro esempio di metodo agli elementi finiti si ricava scegliendo n pari e prendendo l'insieme $\mathbf{X}_d$ costituito dagli elementi di $S_2^{(n)}$ (si veda (1.3.1)) che si annullano in a e in b. E' conveniente lavorare ancora con la base delle funzioni $\phi_k \in \mathbf{X}_d, \quad k = 1, ..., d$ soddisfacenti (3.4.1); ma si osservi che, a seconda che k sia pari o dispari, gli elementi della base cambiano forma, così come è mostrato in figura 3.4.2.

La costruzione della matrice avviene nel modo consueto. Va notato che, essendosi allargato il supporto di alcune delle funzioni della base (nel caso delle funzioni lineari a tratti era $2h$, ora è $4h$), la matrice diventa *pentadiagonale*. Dal

punto di vista operativo conviene considerare la versione ottenuta sostituendo ad f la sua funzione interpolante appartenente a $\mathbf{X}_d$. Evitiamo di eseguire i calcoli espliciti, peraltro molto semplici, anche se un po' laboriosi.

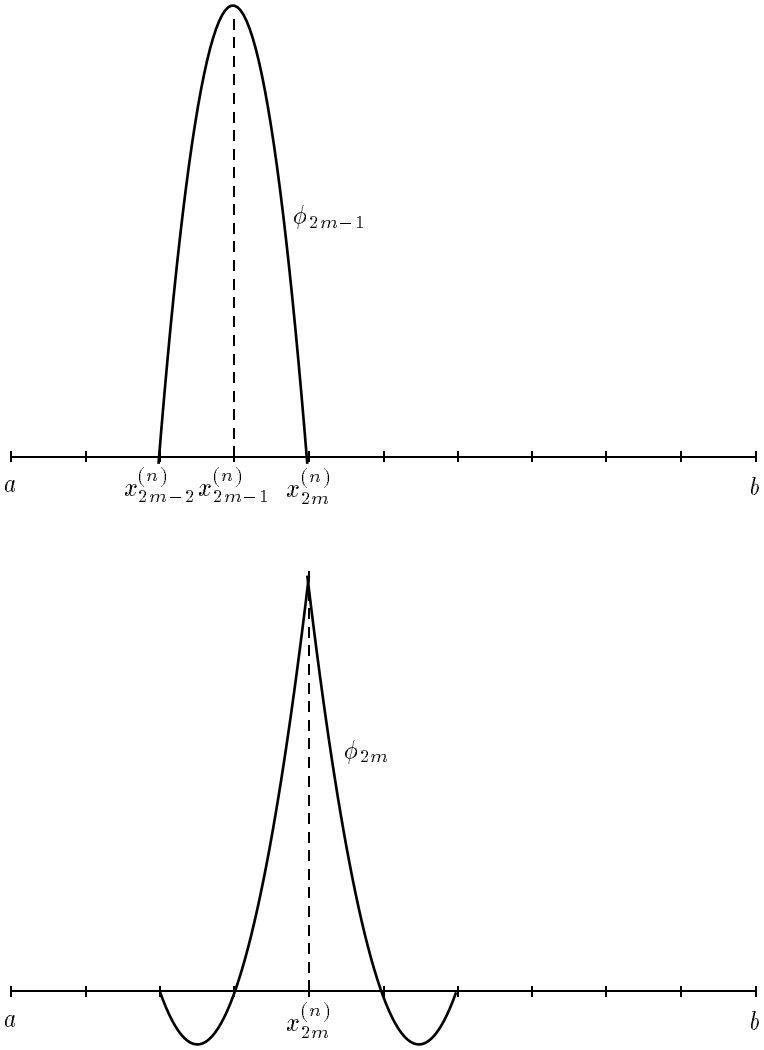

Figura 3.4.2 - *Elementi della base di* $\mathbf{X}_d \subset S_2^{(n)}$.

Avendo innalzato il grado delle funzioni approssimanti ci si aspetta una convergenza più rapida per $d \to +\infty$. In effetti, l'errore $\|u - u_d\|_B$ decade adesso in modo quadratico. Va messo in conto però che il sistema lineare richiede, per la sua risoluzione, un maggiore sforzo computazionale, dovuto all'aumento della *larghezza di banda* della matrice.

Anche i metodi alle differenze finite ammettono versioni di ordine superiore. Per esempio, ci si può basare sulla seguente valutazione della derivata seconda:

$$g''(x_i^{(n)}) = -\frac{1}{12h^2}\Big[g(x_{i+2}^{(n)}) - 16g(x_{i+1}^{(n)}) + 30g(x_i^{(n)}) + \\ -16g(x_{i-1}^{(n)}) + g(x_{i-2}^{(n)})\Big] + \frac{h^4}{90}g^{VI}(x_i^{(n)}) + o(h^4) \tag{3.4.12}$$

la quale coinvolge i valori di g in 5 nodi consecutivi. Si badi però che vengono a mancare in questo modo le due equazioni corrispondenti ai nodi $x_1^{(n)}$ e $x_{n-1}^{(n)}$, che vanno opportunamente dedotte per altre vie, avendo cura di non alterare l'accuratezza del metodo.

Seguendo criteri analoghi, si possono proporre metodi di discretizzazione che utilizzano funzioni polinomiali a tratti di grado più elevato. Occorre fare attenzione in questo caso alla distribuzione dei nodi, in quanto abbiamo imparato nel paragrafo 1.6 che i polinomi di grado alto ed i nodi equispaziati non si accordano molto bene. Studieremo meglio l'argomento nel prossimo paragrafo. Tra i vari altri spazi a dimensione finita, idonei per costruire dei metodi di approssimazione alla Galerkin, troviamo quelli delle funzioni spline (quelle cubiche sono state definite nel paragrafo 1.8) e gli spazi generati da basi di *wavelets*.

In figura 3.4.3 sono riportati i risultati di alcune sperimentazioni concernenti il problema differenziale: $-u'' + \mu u = f$ nell'intervallo $]-1, 1[$, con condizioni al contorno $u(\pm 1) = 0$. Gli esempi si riferiscono al caso $\mu = f = 1000$. Al crescere di μ, la soluzione u, nella parte interna dell'intervallo, tende ad avvicinarsi alla funzione costante pari ad 1. Allo stesso tempo, a causa delle condizioni al contorno nulle, u è costretta a variare in modo repentino nell'intorno degli estremi ± 1, mettendo alla prova gli algoritmi per la sua approssimazione. Le cose vanno bene fintanto che h è assai piccolo, ma diverse patologie si manifestano per valori grandi di detto parametro, come è messo

in risalto in figura. Si evidenzia nei grafici delle funzioni approssimanti, sia un comportamento di tipo oscillante, che uno smussamento in vicinità degli estremi ± 1. Incrementando d tali anomalie svaniscono, sebbene la difficoltà consita appunto nel riconoscere il valore di d a partire dal quale ci si possa fidare. E' saggio quindi dubitare sempre dei risultati numerici. Non cessiamo di ribadire che la garanzia si ottiene solo con le previsioni teoriche, molta esperienza, e un po' di astuzia.

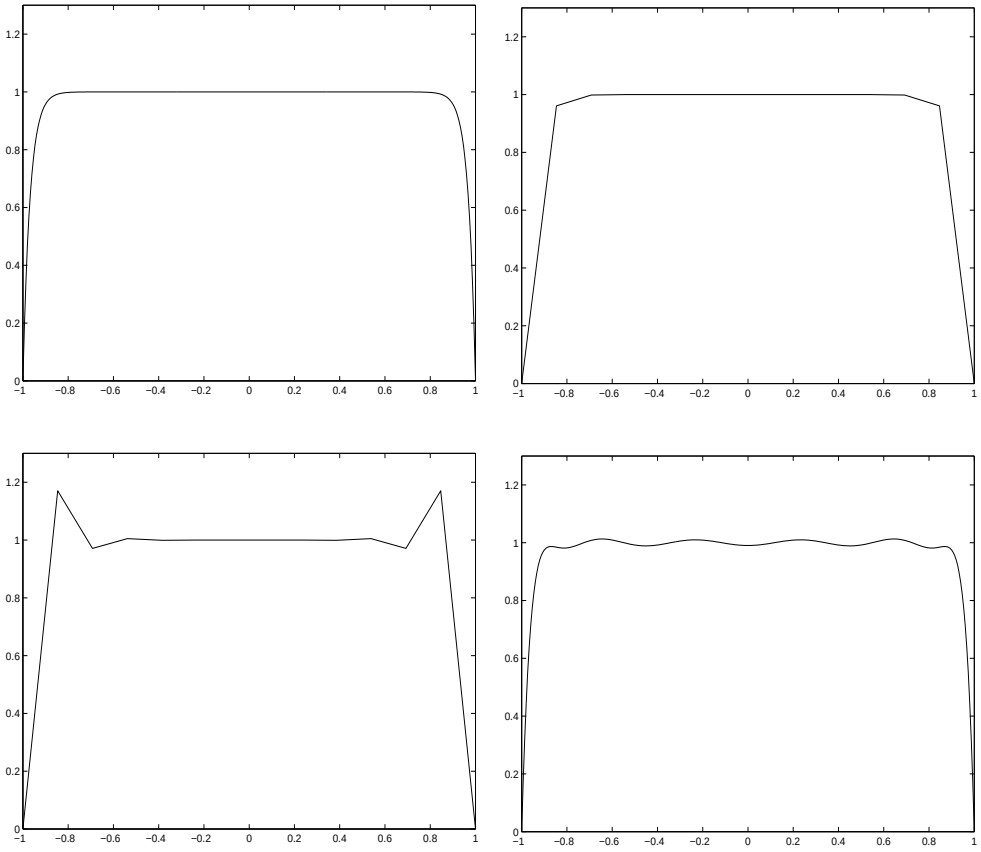

Figura 3.4.3 - *Grafici della soluzione esatta (diagramma 1) del problema differenziale* $-u'' + 1000u = 1000$, *con* $u(\pm 1) = 0$, *e delle sue approssimazioni, mediante il metodo delle differenze finite (diagramma 2), il metodo degli elementi finiti (diagramma 3) e il metodo di collocazione nei nodi di Legendre (diagramma 4). Nei tre casi le soluzioni approssimate sono state ottenute con spazi di dimensione* $d = 12$.

3.5 Il metodo degli elementi spettrali

Si possono impostare tecniche di approssimazione, facenti capo al metodo di Galerkin, che utilizzano polinomi algebrici globalmente definiti su $[a, b]$. Poniamo per convenienza $[a, b] = [-1, 1]$, dopo aver osservato che ad una situazione del genere ci si può comunque ricondurre tramite un opportuno cambiamento di variabile, senza alterare la struttura del problema (3.2.5).

Fissato $n \geq 2$, ora $\mathbf{X}_d$ sarà lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale ad n, che si annullano in ± 1 (la dimensione dello spazio vale dunque $d = n - 1$). Facendo riferimento ai polinomi di Legendre introdotti nel paragrafo 1.4, come base per $\mathbf{X}_d$ cominciamo a proporre la seguente: $\phi_k = (1 - x^2)P_{k-1} \quad k = 1, ..., d$.

Il polinomio incognito in (3.3.1) si esprime pertanto mediante lo sviluppo: $u_d = (1 - x^2)\sum_{j=1}^{d} c_j P_{j-1}$. Grazie a (1.4.5), i c_j sono i coefficienti di Fourier della funzione $u_d/(1 - x^2)$. I termini noti del sistema lineare sono invece in relazione con i coefficienti di Fourier della funzione $(1 - x^2)f$. Gli elementi della matrice, un po' complicati da calcolare, risultano essere tutti non nulli.

Dopo aver rammentato che che $P_k(1) = 1$ e che $P_k(-1) = (-1)^k$, una tecnica simile alla precedente, e nota come metodo *tau*, fa uso della base: $\phi_k = P_{k+1} - 1$ se k è dispari, $\phi_k = P_{k+1} - x$ se k è pari ($k = 1, ..., d$). Altre famiglie di polinomi ortogonali, quali i polinomi di Chebyshev, possono essere coinvolte nella costruzione degli elementi della base. Non proseguiremo oltre in questa direzione, per non appesantire troppo la trattazione.

Un'altro metodo interessante è quello che fa uso della base di Lagrange relativa ad una certa distribuzione di nodi (si veda il paragrafo 1.3). Presi $n + 1$ nodi distinti $x_i^{(n)} \in [-1, 1]$, con $x_0^{(n)} = -1$, $x_n^{(n)} = 1$, i corrispondenti $\phi_k = L_k^{(n)} \quad k = 1, ..., d$, sono perciò polinomi di grado n che soddisfano (3.4.1). Esclusa l'idea di utilizzare nodi equispaziati, la scelta cade quasi automaticamente su famiglie di nodi associate a formule di quadratura Gaussiane, possibilmente di tipo chiuso, per poter includere i punti ± 1, necessari ad imporre le condizioni al contorno. Tipicamente, gli $x_i^{(n)}$, per $i = 1, ..., n-1$, sono gli zeri di P_n'.

Viene spontaneo a questo punto proporre la seguente variante del metodo di Galerkin:

$$(3.5.1) \qquad \sum_{k=0}^{n} u_d'(x_k^{(n)})\psi'(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} + \sum_{k=0}^{n} \mu(x_k^{(n)})u_d(x_k^{(n)})\psi(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)})\psi(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} \qquad \forall \psi \in \mathbf{X}_d$$

dove gli integrali in (3.3.1) sono stati sostituiti da formule di quadratura Gaussiane, provviste dei relativi pesi $\omega_k^{(n)}$ $k = 0, ..., n$.
La formulazione (3.5.1) ammette un'interessante rilettura. Notiamo innanzitutto che

$$\sum_{k=0}^{n} u_d'(x_k^{(n)})\psi'(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} = \int_{-1}^{1} u_d'\psi' \, dx = \tag{3.5.2}$$

$$= - \int_{-1}^{1} u_d''\psi \, dx = - \sum_{k=0}^{n} u_d''(x_k^{(n)})\psi(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} \qquad \forall \psi \in \mathbf{X}_d$$

La prima uguaglianza in (3.5.2) è vera perchè il prodotto $u_d'\psi'$ è un polinomio di grado non superiore a $2n-2$, mentre le formule di quadratura basate sugli zeri di P_n' consentono l'integrazione esatta addirittura fino al grado $2n-1$. Per ricavare la seconda uguaglianza si è integrato per parti osservando che $\psi(\pm 1) = 0$, in quanto ψ appartiene ad $\mathbf{X}_d$. La terza ed ultima uguaglianza consegue dal fatto che $u_d''\psi$ è un polinomio di grado non superiore a $2n-2$, permettendo di riutilizzare le formule di quadratura.
Detto ciò, da (3.5.1) abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Big[- u_d''(x_k^{(n)}) + \mu(x_k^{(n)})u_d(x_k^{(n)}) \Big] \psi(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} = \tag{3.5.3}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k^{(n)})\psi(x_k^{(n)})\omega_k^{(n)} \qquad \forall \psi \in \mathbf{X}_d$$

Si osservi che i termini corrispondenti a $k = 0$ e $k = n$, delle due sommatorie qui sopra, sono stati eliminati in virtù del fatto che ψ si annulla in ± 1.
Presi gli elementi ϕ_i $i = 1, ..., d$, della base di Lagrange come funzioni test, si ricava infine:

$$-u_d''(x_i^{(n)}) + \mu(x_i^{(n)})u_d(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}) \qquad i = 1, ..., d \tag{3.5.4}$$

Si noti che i pesi non sono più contemplati. Si ottiene così il metodo di *collocazione*, dove al polinomio u_d di grado n, assogettato alle condizioni al contorno $u_d(\pm 1) = 0$, viene richiesto di soddisfare esattamente l'equazione

differenziale in (3.2.5) nei nodi di $]-1,1[$ (si ricordi che anche il metodo delle differenze finite ammetteva una simile interpretazione). Considerato che $u_d = \sum_{j=1}^{d} u_d(x_j^{(n)})\phi_j$, le d relazioni in (3.5.4) danno luogo al sistema lineare la cui matrice ha per elementi $-\phi_j''(x_i^{(n)}) + \mu(x_i^{(n)})\delta_{ij}$ con gli indici i e j che variano tra 1 e d. Tale matrice si calcola molto facilmente una volta nota l'espressione esplicita degli elementi della base ϕ_j (si veda l'esercizio 13 del paragrafo 1.9). Il risultato di un esperimento si può vedere in figura 3.4.3. Sebbene u_d (d=12) oscilli leggermente tra un valore nodale e l'altro, le quantità $u_d(x_i^{(n)})$ approssimano decisamente molto bene le corrispettive quantità $u(x_i^{(n)})$. La maggiore accuratezza viene pagata nella risoluzione del sistema lineare, dove la matrice di rigidità risulta essere piena.

Sia il metodo di collocazione che gli altri di cui si è accennato in precedenza in questo paragrafo, si annoverano fra i cosiddetti *metodi spettrali* ([29]). Pur facendo uso del calcolo esplicito di derivate di ordine due, il metodo di collocazione è un erede diretto dei metodi di tipo variazionale. L'aver coinvolto formule di quadratura Gaussiane, consente di ottenere soluzioni con estrema precisione (si rammenti ad esempio quanto asserito nel paragrafo 1.6). Per poter sfruttare le ottime prestazioni dei metodi spettrali, e non vanificare gli sforzi, occorre però ipotizzare una forte regolarità della funzione u.

L'approssimazione con il metodo di collocazione di problemi non lineari si costruisce in modo molto naturale ([30]). Riferendosi all'equazione (3.1.1),

([29]) Il nome trae origine dal fatto che i polinomi ortogonali sono le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville (1.6.7), rifacendosi pertanto allo *spettro* del corrispondente operatore differenziale.

([30]) Considerata l'enorme casistica, ciascun problema non lineare presenta proprie peculiarità, e può celare difficoltà insidiose. Dare a priori la preferenza ad una particolare tecnica di approssimazione e dunque scorretto. Una procedura abituale è quella di sperimentare alcuni algoritmi sul problema in una sua forma semplificata, talvolta addirittura lineare, in modo da anticipare gli eventuali comportamenti anomali e corregere l'impostazione. Consigliamo comunque di non perdere di vista il problema di partenza. Capita spesso che si sviluppino codici di calcolo perfetti per l'approssimazione del modello semplificato, che non lasciano poi molto adito a generalizzazioni, costringendo in un secondo tempo a riesaminare l'intera problematica dall'inizio.

basta imporre che il polinomio u_d soddisfi

$$(3.5.5) \qquad \begin{cases} u_d''(x_i^{(n)}) \;=\; F\Big(x_i^{(n)}, u_d(x_i^{(n)}), u_d'(x_i^{(n)})\Big) & i = 1, ..., d \\ u_d(a) \;=\; \alpha \qquad\qquad u_d(b) \;=\; \beta \end{cases}$$

problema facilmente riconducibile ad un sistema non lineare a d equazioni e d incognite, dopo aver constatato che il calcolo della derivata prima di u_d nei nodi si riduce all'applicazione della matrice $\{\phi_j'(x_i^{(n)})\}$ al vettore $\{u_d(x_j^{(n)})\}$. E' importante che i nodi in (3.5.5) siano riconducibili a zeri di polinomi ortogonali, per non perdere il legame con la formulazione variazionale. Per i noti motivi, la scelta dei nodi equispaziati è alquanto infelice.

Il metodo degli *elementi spettrali* rappresenta una via di mezzo tra i metodi spettrali e quello degli elementi finiti. Si lavora con funzioni approssimanti appartenenti allo spazio $\mathbf{X}_d \subset S_m^{(n)}$ (n multiplo di m, con $d = n-1$) delle funzioni continue e polinomiali a tratti che si annullano in a e in b. I nodi di ciascun sottointervallo $]x_{mj-m}^{(n)}, x_{mj}^{(n)}[\subset [a,b]$ $j = 1, ..., n/m$, sono scelti in modo da essere in proporzione con gli zeri di P_m' in $]-1,1[$. Gli elementi della base soddisfano (3.4.1). A partire dalla formulazione variazionale, l'integrazione in ciascun sottointervallo viene sostituita da formule di quadratura Gaussiane. L'impostazione è dunque quella degli elementi finiti, eccetto che all'interno di ogni sottointervallo ci si può rifare al metodo di collocazione, traendo giovamento nel trattamento di eventuali termini non lineari. La matrice di rigidità del metodo degli elementi spettrali è a banda, avente quest'ultima una larghezza pari a $2m+1$.

3.6 Problemi non simmetrici

Un esempio di problema differenziale lineare, che capita molto di frequente nelle applicazioni e non contemplato nella precedente trattazione, è il seguente

$$(3.6.1) \qquad \begin{cases} -\,u''(x) \;+\; \gamma(x)u'(x) \;+\; \mu(x)u(x) \;=\; f(x) & x \in]a,b[\\ u(a) \;=\; \alpha \qquad\qquad u(b) \;=\; \beta \end{cases}$$

dove γ e μ sono funzioni assegnate.

Purtroppo non si riesce più a caratterizzare u, come in (3.2.1), per un dato funzionale $\mathcal{L}$. Ciò non vieta comunque di considerare la versione variazionale di (3.6.1), che appare come segue:

$$\int_a^b u'\psi'\,dx \;+\; \int_a^b \gamma u'\psi\,dx \;+\; \int_a^b \mu u\psi\,dx \;=\; \int_a^b f\psi\,dx \tag{3.6.2}$$

per ogni funzione test $\psi \in \mathbf{X}$. Le difficoltà tecniche consistono ora nel fatto che la forma bilineare $B(u,\psi) = \int_a^b (u'\psi' + \gamma u'\psi + \mu u\psi)dx$ non è più simmetrica, rendendo impossibile supporre che B sia un prodotto scalare. Tuttavia, anche in questa circostanza, si riescono a sviluppare delle ottime teorie ([31]) per l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (3.6.2), dalle quali si trae vantaggio anche nello studio degli aspetti numerici.

Quando $\mathbf{X}_d$ è lo spazio delle funzioni continue e lineari a tratti, munito della base di Lagrange (si veda la figura 3.4.1), il metodo di Galerkin (3.4.5), dopo l'aggiunta del termine contenente la derivata prima, diviene

$$\begin{aligned} &-\frac{\zeta_{i+1}^{(n)} - 2\zeta_i^{(n)} + \zeta_{i-1}^{(n)}}{h} \;+\; \tfrac{1}{2}\gamma\Big(\zeta_{i+1}^{(n)} \;-\; \zeta_{i-1}^{(n)}\Big) \;+ \\ &\qquad + \tfrac{1}{6}\mu h\Big(\zeta_{i+1}^{(n)} + 4\zeta_i^{(n)} + \zeta_{i-1}^{(n)}\Big) \;=\; \int_a^b f\phi_i\,dx \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

dove è stato supposto, per semplicità, che le funzioni γ e μ fossero costanti. Il modo di valutare la derivata prima in (3.6.3) è lo stesso adottato in genere per il metodo delle differenze finite. A questo proposito, insieme a (3.4.10), si può provare che

$$g'(x_i^{(n)}) \;=\; \frac{g(x_{i+1}^{(n)}) - g(x_{i-1}^{(n)})}{2h} \;-\; \frac{h^3}{6}g'''(x_i^{(n)}) \;+\; o(h^2) \tag{3.6.4}$$

La derivata prima di g in $x_i^{(n)}$, approssimata con il rapporto incrementale $h^{-1}[g(x_{i+1}^{(n)}) - g(x_{i-1}^{(n)})]$, è perciò più accurata di quella che si otterrebbe con il

([31]) Il teorema di *Lax-Milgram* afferma che, se esistono due costanti positive c_1 e c_2 ed una norma $\|\cdot\|$ tali per cui $B(u,\psi) \le c_1\|u\|\|\psi\|$ e $B(u,u) \ge c_2\|u\|^2$ $\forall u,\psi$ appartenenti ad $\mathbf{X}$, allora (3.2.7) ammette soluzione unica $u \in \mathbf{Y}$, dove $\mathbf{Y}$ è la chiusura di $\mathbf{X}$ nella norma $\|\cdot\|$. Tale teorema è un'estensione del teorema di rappresentazione per i funzionali $\mathcal{F}$ continui su $\mathbf{Y}$. Si noti che, se B è simmetrica, prendendo $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B$ e $c_1 = c_2 = 1$, si ritrovano i casi già discussi.

rapporto incrementale basato solo su due nodi consecutivi. Questa proprietà aiuta a provare che l'ordine di convergenza di u_d a u è pari a quello relativo al caso $\gamma = 0$.

Particolarmente ostici dal punto di vista numerico sono quei problemi dove la parte non simmetrica dell'operatore differenziale è fortemente dominante (cioè quando γ è grande). Un tipico problema di tipo *stiff* è ad esempio il seguente:

$$\begin{cases} -\epsilon u''(x) \ + \ u'(x) \ = \ 1 \qquad x \in]0,1[\\ \\ u(0) \ = \ u(1) \ = \ 0 \end{cases} \tag{3.6.5}$$

dove $\epsilon > 0$ è un parametro assegnato.
Invitiamo il lettore a sperimentare diverse tecniche numeriche per l'approssimazione di u (si noti che u può essere calcolata analiticamente) e a costatare che, per ϵ piuttosto piccolo, sorgono degli inconvenienti che si attenuano solo innalzando cospicuamente la dimensione dello spazio $\mathbf{X}_d$.

3.7 Problemi agli autovalori

Un problema di indubbia utilità in numerose scienze applicate, è quello di determinare gli autovalori (reali o complessi) e le corrispondenti autofunzioni di un assegnato operatore differenziale lineare.
Prendiamo a modello il seguente semplice problema

$$\begin{cases} -u''(x) \ + \ \mu u(x) \ = \ \lambda u(x) \qquad x \in]a,b[\quad u \not\equiv 0 \\ \\ u(a) \ = \ u(b) \ = \ 0 \end{cases} \tag{3.7.1}$$

dove μ è una funzione positiva assegnata. La teoria insegna che (3.7.1) ammette infinite soluzioni. Più precisamente, si ha una successione $\lambda = \lambda_m \quad m \geq 1$ di autovalori reali, positivi e distinti, che supporremo ordinati in modo crescente. Per ogni $m \geq 1$, all'autovalore λ_m corrisponde un'autofunzione u_m, normalizzata opportunamente. Se μ è costante, allora è ben noto che $\lambda_m = \mu + m^2\pi^2/(b-a)^2$ e che $u_m(x) = \text{sen}[(x-a)m\pi/(b-a)], \ m \geq 1$.
La versione in forma variazionale di (3.7.1) si scrive

$$\int_a^b u'\psi' \ dx \ + \ \int_a^b \mu u\psi \ dx \ = \ \lambda \int_a^b u\psi \ dx \qquad \forall \psi \in \mathbf{X} \tag{3.7.2}$$

E' semplice dimostrare, a partire da (3.7.2), che gli autovalori sono effettivamente reali e positivi. Per sincerarsene basta infatti prendere $\psi = \bar{u}$, dove con $\bar{u}$ denotiamo la funzione complessa e coniugata di u, e ricordare che $B(u,\psi) = \int_a^b (u'\psi' + \mu u\psi)dx$ è una forma bilineare simmetrica e definita positiva (lavorando in campo complesso sarebbe più corretto dire che B è *Hermitiana*).

Per avere l'approssimazione di (3.7.2) mediante il metodo di Galerkin, si cercano $\lambda_d \in \mathbf{R}$ e $u_d \in \mathbf{X}_d$ tali per cui

$$\int_a^b u_d'\psi'\,dx \;+\; \int_a^b \mu u_d\psi\,dx \;=\; \lambda_d \int_a^b u_d\psi\,dx \qquad \forall\psi \in \mathbf{X}_d \tag{3.7.3}$$

Rappresentando u_d in una base $\phi_k \in \mathbf{X}_d \quad k = 1,...,d$, ci riconduciamo ad un problema agli autovalori in dimensione finita

$$A_d\ \vec{x} \;=\; \lambda_d B_d\ \vec{x} \tag{3.7.4}$$

dove $A_d = \left\{\int_a^b (\phi_j'\phi_i' + \mu\phi_j\phi_i)dx\right\}$, $B_d = \left\{\int_a^b \phi_j\phi_i dx\right\}$, ed il vettore $\vec{x}$ contiene i coefficienti dello sviluppo di u_d rispetto agli elementi della base.
Indicheremo con $\lambda_{d,m} \quad m = 1,...,d$, gli autovalori del problema in dimensione finita. Ci si può chiedere se è vero che $\lambda_{d,m}$ approssimi λ_m. La risposta è affermativa, ma occorre valutarla con le dovute precauzioni. Indagheremo in dettaglio solo il caso del metodo delle differenze finite, dove, posto $\zeta_i^{(n)} = u_d(x_i^{(n)})$, il problema agli autovalori diviene

$$-\frac{\zeta_{i+1}^{(n)} - 2\zeta_i^{(n)} + \zeta_{i-1}^{(n)}}{h^2} \;+\; \mu(x_i^{(n)})\zeta_i^{(n)} \;=\; \lambda_d\zeta_i^{(n)} \qquad i = 1,...,n-1 \tag{3.7.5}$$

con $d = n-1$ e $\zeta_0^{(n)} = \zeta_n^{(n)} = 0$.
Gli autovalori della matrice (3.4.4) sono noti esplicitamente e valgono $2h^{-1}\big(1 - \cos(mh\pi/(b-a))\big)$ per $m = 1,...,d$. Quindi, se μ è costante, otteniamo

$$\lambda_{d,m} \;=\; \mu \;+\; \frac{2}{h^2}\left(1 \;-\; \cos\frac{mh\pi}{b-a}\right) \qquad m = 1,...,d \tag{3.7.6}$$

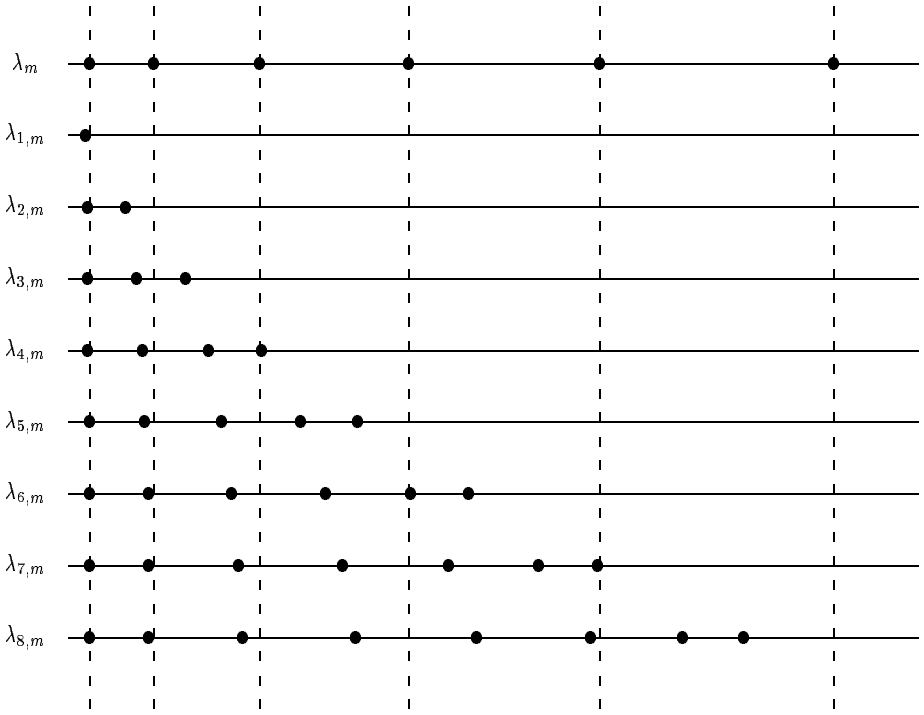

Figura 3.7.1 - *Confronto fra gli autovalori di (3.7.1) e le loro approssimazioni al variare della dimensione d tra 1 e 8.*

Si deduce che, se l'indice m è piccolo rispetto a d, allora $1-\cos(mh\pi/(b-a)) \approx \frac{1}{2}\big(mh\pi/(b-a)\big)^2$, e dunque è vero che $\lambda_{d,m} \approx \lambda_m = \mu + \big(m\pi/(b-a)\big)^2$. Se invece l'indice m è prossimo a d (cioè mh non è piccolo), si nota una discrepanza tra i corrispondenti valori $\lambda_{d,m}$ e λ_m. Infatti, $\lambda_{d,d} \approx \mu + 4d^2/(b-a)^2$ è assai più piccolo del corrispondente λ_d. Tuttavia, mantenendo fissato l'indice m, e costruita la successione $\{\lambda_{d,m}\}_{d\geq m}$, è vera la relazione:

$$\lim_{d\to+\infty} \lambda_{d,m} \;=\; \lambda_m \tag{3.7.7}$$

In figura 3.7.1 vediamo come si distribuiscono gli autovalori $\lambda_{d,m}$ $m = 1, ..., d$, per alcuni valori del parametro d, nel caso in cui $b-a = 1$ e $\mu = 0$.

Un simile comportamento è manifestato anche dagli autovalori relativi ad altre tecniche di discretizzazione. La ragione per cui, fissato d, lo spiegamento degli autovalori più grandi di (3.7.4) non assomiglia alla reale distribuzione degli autovalori di (3.7.1), è attribuibile all'incapacità (a causa dello scarso numero di nodi a disposizione) delle autofunzioni approssimanti di seguire il forte andamento oscillatorio manifestato dalle corrispondenti autofunzioni esatte. Questo spiega anche perchè, fissando m ed aumentando d, con conseguente aumento del numero di nodi, le cose tendono a migliorare. Si badi che, in genere, la dimostrazione di (3.7.7) e tutt'altro che immediata, e in talune circostanze (come per il caso del metodo di collocazione) non è neppure nota.

3.8 Miscellanea

Può capitare che le condizioni al contorno in aggiunta all'equazione (3.1.1) dipendano dalla derivata prima di u, ed un esempio che si incontra frequentemente è: $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$, con α e β assegnati. Nel caso lineare si tratta dunque di studiare l'equazione

$$\text{(3.8.1)} \qquad \begin{cases} -u''(x) + \mu(x)u(x) = f(x) & x \in]a,b[\\ u'(a) = \alpha \qquad u'(b) = \beta \end{cases}$$

che, quando $\mu > 0$, ammette soluzione unica. Alla luce di questa modifica occorre correggere l'impostazione variazionale che diviene

$$\text{(3.8.2)} \qquad \int_a^b u'\psi'\,dx + \int_a^b \mu u\psi\,dx = \int_a^b f\psi\,dx - \alpha\psi(a) + \beta\psi(b) \qquad \forall\psi$$

dove, sia ad u che a ψ, non è più richiesto di annullarsi agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Tralasciamo di verificare che (3.8.1) e (3.8.2) sono equivalenti quando μ ed f sono continue e $u \in C^2([a,b])$. Prendendo avvio da (3.8.2) non è difficile rivedere il metodo di Galerkin e proporre diverse tecniche di approssimazione facendo variare gli spazi a dimensione finita e le loro relative basi.

Altre condizioni al contorno interessanti sono quelle di tipo periodico, collegate d'abitudine a problemi più complessi definiti su sfere, cilindri, o altri solidi a simmetria assiale. Queste si presentano come:

$$\text{(3.8.3)} \qquad u(a) = u(b) \qquad \left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=a} = \left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=b} \qquad \forall k \geq 1$$

In queste circostanze può essere conveniente espandere la soluzione in serie di Fourier di coseni (o un'altra base di funzioni periodiche). Nel cercare soluzioni periodiche dell'equazione differenziale $-u'' + \mu u = f$, con μ costante, si ricava la seguente relazione

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[\frac{4k^2\pi^2}{(b-a)^2} + \mu \right]^{-1} \cos \frac{x-a}{b-a} 2k\pi \qquad x \in [a,b] \tag{3.8.4}$$

dove i c_k $k \geq 0$, sono i coefficienti di Fourier di f rispetto alla stessa base di coseni. La serie in (3.8.4) converge tanto più rapidamente quanto più f è regolare. Si sconsiglia di utilizzare questa tecnica, precorritrice dei metodi spettrali, quando le condizioni al contorno non sono periodiche, in quanto il prolungamento periodico di u ad $\mathbf{R}$ potrebbe non essere regolare (si era già accennato a ciò nel paragrafo 1.5), portando ad un drastico calo della velocità di convergenza.

Terminiamo con il proporre un problema agli autovalori che coinvolge derivate del quarto ordine

$$\begin{cases} u^{IV}(x) = \lambda u(x) & x \in]a,b[\quad u \not\equiv 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases} \tag{3.8.5}$$

In esso, $u(x)$ rappresenta la deflessione nel punto $x \in]a,b[$ di una verga oscillante bloccata agli estremi. Prendendo delle funzioni test ψ che si annullano con le loro derivate prime agli estremi di $[a,b]$, otteniamo la versione di (3.8.5) in forma debole

$$\int_a^b u''\psi''\, dx + \int_a^b \mu u\psi\, dx = \int_a^b f\psi\, dx \tag{3.8.6}$$

dalla quale nascono poi i vari metodi per l'approssimazione di u. Ricordiamo che l'integrale della curvatura: $\frac{1}{2}\int_a^b |u''|^2 dx$, rappresenta l'energia potenziale di deformazione.

3.9 Qualche esercizio

1. Nell'applicare il metodo di Newton per il calcolo di $\hat{\gamma}$ tale per cui $G(\hat{\gamma}) = u_{\hat{\gamma}}(b) = \beta$, con u_γ data da (3.1.4), occorre conoscere $\frac{d}{d\gamma}G$. Impostare l'algoritmo, dopo aver osservato che, posto $v(x) = \frac{\partial}{\partial\gamma}u_\gamma(x)$, cosicchè $\frac{d}{d\gamma}G = v(b)$, allora v è soluzione del problema di Cauchy: $v''(x) = \frac{\partial}{\partial y}F\big(x, u_\gamma(x), u'_\gamma(x)\big)v(x) + \frac{\partial}{\partial z}F\big(x, u_\gamma(x), u'_\gamma(x)\big)v'(x)$, con $v(a) = 0$ e $v'(a) = 1$.
2. Trovare esplicitamente la funzione G nel caso che il metodo di *shooting* venga applicato all'equazione $u'' = u$ con $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$.
3. Nel metodo di *shooting multiplo*, viene scelto un punto $c \in]a, b[$ e, dati i parametri γ e δ, si cercano due funzioni u_γ e u_δ entrambi soddisfacenti rispettivamente (3.1.1) in $]a, c[$ e $]c, b[$, soggette alle condizioni: $u_\gamma(a) = \alpha$, $u'_\gamma(a) = \gamma$, $u_\delta(c) = u_\gamma(c)$, $u'_\delta(c) = \delta$. L'obiettivo è ora quello di trovare $\hat{\gamma}$ e $\hat{\delta}$ tali per cui $u_{\hat{\delta}}(b) = \beta$. Introdurre un'opportuna funzione $\vec{G} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ in modo da vedere il metodo come il problema della ricerca degli zeri di $\vec{G}$. Generalizzare al caso in cui vengano introdotti più punti nell'intervallo $]a, b[$.
4. Si dimostri che, se g è continua e $\int_a^b g\psi dx = 0 \ \ \forall\psi \in C^\infty([a, b])$, allora g è identicamente nulla. Sfruttare ciò per verificare che, se $u \in C^2(]a, b[)$, allora (3.2.4) implica che $u''(x) = F(x, u(x)) \ \ \forall x \in]a, b[$.
5. In base alla regolarità di f, dare delle stime di convergenza per le formule di quadratura proposte in (3.4.6) e (3.4.7).
6. Dimostrare le relazioni (3.4.10) e (3.4.12).
7. Si verifichi che, se $g \in C^3([a, b])$, allora è vera (3.6.4). Si constati, al contrario, che anche se esiste il $\lim_{h\to 0}\big[g(x_{i+1}^{(n)}) - g(x_{i-1}^{(n)})\big]/2h$ non è detto che g sia derivabile in $x_i^{(n)}$.
8. Un metodo classico per impostare la dimostrazione della convergenza del metodo (3.4.8) è il seguente. Si parte dalla relazione $-u''(x_i^{(n)}) + \mu(x_i^{(n)})u(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$ e si riscrive $-u''(x_i^{(n)})$ facendo uso di (3.4.10). Si sottrae poi da (3.4.8) l'equazione ottenuta. Notiamo che, dato un sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, con A matrice invertibile e simmetrica, la soluzione $\vec{x}$ soddisfa $\|\vec{x}\| \leq \rho(A^{-1})\|\vec{b}\|$, dove ρ indica il raggio spettrale. Si prosegua dando una maggiorazione all'errore $\left(\sum_{i=1}^{n-1} |\zeta_i^{(n)} - u(x_i^{(n)})|^2\right)^{1/2}$, sapendo che il minimo autovalore della matrice (3.4.4), che è anche il

massimo autovalore della sua inversa, vale $2h^{-1}\big(1-\cos h\pi/(b-a)\big) \leq h\pi^2/(b-a)^2$.

9. Si calcoli la matrice di rigidità, relativa al metodo degli elementi finiti, che utilizza la base rappresentata in figura 3.4.2.

10. Indicando con p_i il polinomio di grado 4 passante per i punti $(x_{i+k}^{(n)}, \zeta_{i+k}^{(n)})$ con $k=-2,-1,0,1,2$, e imponendo che $-p_i''(x_i^{(n)}) + \mu(x_i^{(n)})p_i(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$ $i=2,...,n-2$, scrivere il corrispondente metodo alle differenze finite per l'equazione $-u''+\mu u = f$. Mettere in relazione quanto ottenuto con l'espressione (3.4.12).

11. Rivedere il metodo di Galerkin (3.3.1) e le sue varianti adattandolo al caso in cui i nodi $x_i^{(n)}$ $i=0,...,n$, non siano più equispaziati.

12. Per i e j che variano tra 1 ed $n-1$, si calcolino gli elementi della matrice $\{\phi_j'(x_i^{(n)})\}$ dove: $x_0^{(n)}=-1$, $x_n^{(n)}=1$, gli altri nodi sono gli zeri di P_n', ed i polinomi ϕ_j sono i rispettivi elementi della base di Lagrange (si veda l'esercizio 13 del paragrafo 1.9). Verificare che, applicando tale matrice al vettore $\{q(x_j^{(n)})\}$, dove q è un polinomio di grado n che si annulla in ± 1, si ricava il vettore $\{q'(x_i^{(n)})\}$.

13. Costruire la matrice degli elementi spettrali nel caso in cui $n/m=2$.

14. Applicando il metodo (3.6.3) nel caso dell'equazione (3.6.5), si ricavano i valori $\zeta_i^{(n)} = hi-(\chi^i-1)/(\chi^n-1)$ con $\chi=(2\epsilon+h)/(2\epsilon-h)$. Si controlli che tali soluzioni approssimanti non oscillano se e solo se $h \leq \frac{1}{2}\epsilon$.

15. Tenendo conto di (3.7.6), verificare che le corrispettive autofunzioni $u_{d,m}$ appartenenti a $\mathbf{X}_d$, soddisfano: $u_{d,m}(x_j^{(n)}) = \mathrm{sen}\big(mjh\pi/(b-a)\big)$, per j ed m che vanno da 1 a d.

16. Sia $\mathbf{X}_d$ lo spazio delle funzioni continue e lineari a tratti che si annullano in $x=a$ e $x=b$. Se $\mu=0$, si verifichi che le matrici in (3.7.4) soddisfano: $A_d = 6h^{-2}(hI_d - B_d)$, avendo denotato con I_d la matrice identità. Si sfrutti questa informazione per ricavare esplicitamente gli autovalori λ_d. Discutere poi il caso $\mu \neq 0$.

17. Mostrare che, quando u è sufficientemente regolare, (3.8.1) e (3.8.2) sono equivalenti.

18. Si approssimi con il metodo di Galerkin il problema differenziale $-u''+\mu u = f$ (μ costante) dove ad u sono imposte le condizioni periodiche (3.8.3). Si usi come spazio a dimensione finita $\mathbf{X}_d$ quello generato dalla

base $\{\cos\frac{x-a}{b-a}2k\pi\}_{k=0,d-1}$. Si paragoni l'espressione ricavata per u_d con quella data per u in (3.8.4).

19. Fornire un'espressione per il calcolo approssimato di $g^{IV}(x_i^{(n)})$ usando i valori di g nei nodi $x_{i+k}^{(n)}$ $k = -2, -1, 0, 1, 2$.

3.10 Bibliografia di questo capitolo

I metodi qui esposti sono in gran parte versioni semplificate di analoghe procedure applicate a problemi ai dati al contorno per equazioni alle derivate parziali. Consigliamo quindi di dare un'occhiata anche alla bibliografia del capitolo 4. Per una prima infarinatura, un ottimo testo, sia per i contenuti che per l'esposizione, è [h]. Testi più orientati verso i metodi degli elementi finiti e delle differenze finite sono [a], [b], [e], [l], [n], [o], [p]; mentre per i metodi spettrali rinviamo a [c], [f], [g]. Per una discussione sulle origini fisiche dei problemi trattati, un libro che non può mancare in una buona biblioteca è [d]. Altri testi di simile natura sono [i], [m].

[a] Aubin J. P., *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.

[b] Axelsson O., Barker V. A., *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1984.

[c] Boyd J. P., *Chebyshev & Fourier Spectral Methods*, LNE, Springer, New York, 1989.

[d] Courant R., Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics*, Wiley-Interscience, New York, 1953.

[e] Fox L., *Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1957.

[f] Funaro D., *Polynomial Approximation of Differential Equations*, LNP, mon. 8, Springer, Heidelberg, 1992.

[g] Gottlieb D., Orszag S. A., *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*, CBMS-NSF, SIAM, Philadelphia, 1977.

[h] Iserles A., *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[i] Jeffreys H., Jeffreys B. *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

[l] Keller H. B., *Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems*, Blaisdell, Londra, 1968.

[m] Richards P. I., *Manual of Mathematical Physics*, Pergamon Press, Belfast, 1959.

[n] Strang G., Fix G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.

[o] Wait R., Mitchell A. R., *Finite Element Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, Chicester, 1985.

[p] Zienkiewicz O. C., Morgan K., *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983.