Compito del 1 - 2 - 2017

1. Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare gli autovalori di A e il suo determinante. Trovarne la fattorizzazione LU e risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = (12, -4, 6)$.
Dato $x_1 = 4$, scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi x_8, attraverso la successione: $x_{n+1} = x_n^3 + 2, \;\; n \geq 1$.

Gli autovalori di A sono -2 e $3 \pm 3i$. Per ottenere il determinante basta fare il loro prodotto, che fornisce: -36.
Si ha poi:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si ottiene infine $\vec{x} = (1, 2, 3)$.
Per il calcolo del termine x_8 della successione si può scrivere ad esempio:

```
successione=4;
  for k=1:7
     successione=successione^3+2;
  end
successione
```

2. Dato il parametro α, calcolare la divergenza e il rotore del campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z^2 + \alpha x)$$

Per quali valori di α, $\vec{F}$ ammette potenziale?
Al variare di α calcolare il lavoro lungo la curva $\vec{\gamma}(t) = (t, t, 2t)$, con $t \in [0, 1]$.

Si ha che $\text{div}\vec{F} = 2z$ e $\text{rot}\vec{F} = (0, -\alpha, 0)$. Si ha potenziale $P(x, y, z) = xy + z^3/3$ solo quando $\alpha = 0$. Per quanto riguarda il lavoro, si ha:

$$L = \int_0^1 [8t^2 + 2(\alpha + 1)t]dt = \frac{11}{3} + \alpha.$$

3. Risolvere il sistema differenziale:

$$y'(t) = y(t) + z(t) \qquad y(0) = 1$$

$$z'(t) = 6y(t) \qquad z(0) = 0$$

trasformandolo prima in un'equazione differenziale del secondo ordine nell'incognita y, e ricavando z successivamente.

Derivando la prima equazione si ricava:

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0 \quad \text{con } y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = y(0) + z(0) = 1$$

Dall'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 6$, si ricavano le radici $\lambda = 3$ e $\lambda = -2$, per cui: $y(t) = ae^{3t} + be^{-2t}$ e $y'(t) = 3ae^{3t} - 2be^{-2t}$.
Le costanti a e b devono soddisfare le relazioni $a+b = 1$ e $3a-2b = 1$, da cui $a = 3/5$ e $b = 2/5$. Infine, ancora dalla prima equazione differenziale, si ottiene: $z(t) = y'(t) - y(t) = \frac{6}{5}(e^{3t} - e^{-2t})$.

4. Sia dato il triangolo T con vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$. Calcolare l'integrale su T della funzione $f(x,y) = \cos \pi y$, sia in $dxdy$ che in $dydx$, cioè invertendo l'ordine di integrazione.

Si ha:

$$\int_T f = \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} \cos \pi y \; dy \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \sin \pi(1 - x/2) \; dx =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \Big[\cos \pi(1 - x/2) \Big]_0^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

Oppure:

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_0^{2(1-y)} \cos \pi y \; dx \right) dy = 2 \int_0^1 (1 - y) \cos \pi y \; dy =$$

$$= \frac{2}{\pi} \Big[(1 - y) \sin \pi y - \frac{1}{\pi} \cos \pi y \Big]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}$$