Compito del 10 - 6 - 2014

1. Dati il parametro α e la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

calcolare il determinante di A, i suoi autovalori ed i relativi autovettori (in campo complesso). Determinare infine A^{-1}.

Il determinante vale 1. Per quanto riguarda gli autovalori λ e gli autovettori $\vec{v}$, si ha:

$$\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad \vec{v} = a(1, +i)$$

$$\lambda = \cos\alpha - i\sin\alpha \qquad \vec{v} = a(1, -i)$$

con a numero reale arbitrario.
La matrice inversa si ricava sostituendo α con $-\alpha$; pertanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2. Sia data la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, con:

$$\gamma_1(t) = (t, t) \quad t \in [0, 1] \qquad \gamma_2(t) = (t, 1) \quad t \in [1, 2]$$

$$\gamma_3(t) = (t, 3 - t) \quad t \in [2, 3]$$

Si calcolino la lunghezza di γ e l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{F}$, dove $\vec{F} = (y, 2y)$.

La curva semplice è formata da tre segmenti con lunghezza complessiva pari a $1 + 2\sqrt{2}$. Inoltre:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^1 3t\ dt = 3/2 \qquad \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_1^2 dt = 1$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_2^3 (t - 3)dt = -1/2$$

Dunque $\int_\gamma \vec{F} = 2$.

3. Data l'equazione differenziale:

$$y'(t) = Kt^2 e^{-y(t)}$$

si trovi la costante K in modo che soluzione soddisfi $y(0) = 0$ ed $y(t)$ tenda a $-\infty$ per $t \to 1$ da sinistra.

Separando le variabili si ricava:

$$e^{y(t)} = \int e^{y(t)} y'(t) dt = K \int t^2 dt = \frac{K}{3} t^3 + C$$

dove C è una nuova costante. Da qui si ottiene:

$$y(t) = \ln(Kt^3/3 + C)$$

Si ha che $y(0) = 0$ quando $C = 1$. Infine, con $K = -3$, si ha la soluzione: $y(t) = \ln(1-t^3)$, la quale presenta la singolarità richiesta in $t = 1$.

4. Si calcolino gli integrali:

$$I_1 = \int_D \frac{1}{x^2 + y^2}\ dxdy \qquad\qquad I_2 = \int_D \frac{x}{x^2 + y^2}\ dxdy$$

dove D è costituito dai punti del piano (x, y) con $1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$.

In coordinate polari, posto $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, si ha:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{\rho^2}\ \rho d\rho \right) d\theta = 2\pi \ln 2$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{\rho}\ \rho d\rho \right) \cos \theta\ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta\ d\theta = 0$$