Compito del 11 - 1 - 2022

1. Sia data $f :]-2, 2\pi[\to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = -x \quad \text{se } x \in]-2, 0] \qquad f(x) = \cos x \quad \text{se } x \in]0, 2\pi[$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare l'immagine di f. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

L'immagine di f è $B = [-1, 2[$, per cui: $\sup(f)$=2, $\inf(f)$=-1, $\min(f)$=-1, mentre $\max(f)$ non esiste. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio tranne che nel punto $x = 0$. Pur assumendo che il codominio sia B, la f così modificata non risulta essere invertibile in quanto non iniettiva (ad esempio assume 3 volte il valore 0).

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]0, 2\pi[\to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \ = \ e^{(\sin x)^2}$$

Dire quali sono i valori di x dove f assume massimi o minimi relativi.

La funzione è continua e derivabile in tutto $]0, 2\pi[$. Si ha:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x \ e^{(\sin x)^2} \qquad f''(x) = 2\Big(1 - 2(\sin x)^4\Big) e^{(\sin x)^2}$$

Se ne deduce che f' si annulla per $x = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$; mentre f'' si annulla nei punti in cui $(\sin x)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. La funzione assume il valore massimo (pari a e) nei punti $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$. Essa assume il valore minimo (pari a -1) nel punto $x = \pi$. Ci sono inoltre 4 punti di flesso.

3. Calcolare $G(2\pi)$ dove $G : [-2, 2\pi] \to \mathbf{R}$ è data da

$$G(t) = \int_{-2}^{t} x f(x) \ dx$$

e f è definita nell'esercizio **1**.

Per $t \in [-2, 0]$ si ha:

$$G(t) = \int_{-2}^{t} (-x^2) \ dx = -\tfrac{1}{3}\Big[x^3\Big]_{-2}^{t} = -\tfrac{1}{3}(t^3 + 8)$$

per cui $G(0) = -\frac{8}{3}$. Inoltre, per $t \in [0, 2\pi]$ si ha:

$$G(t) = G(0) + \int_0^t x \cos x \; dx = -\frac{8}{3} + \Big[x \sin x + \cos x\Big]_0^t =$$

$$= -\frac{11}{3} + t \sin t + \cos t$$

dove la primitiva è stata calcolata tramite integrazione per parti. Si deduce infine che: $G(2\pi) = -\frac{8}{3}$.

4. Applicando l'algoritmo di eliminazione Gaussiana, calcolare la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + iy = 3 \\ -ix + z = -3i \\ y - z = 2i \end{cases}$$

In forma matriciale il sistema si riscrive come:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & i & 0 & 3 \\ -i & 0 & 1 & -3i \\ 0 & 1 & -1 & 2i \end{array}\right)$$

Questo viene trasformato in forma triangolare nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & i & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -2i \\ 0 & 0 & 2 & -4i \end{array}\right)$$

Risolvendo dal basso si ricava: $(x, y, z) = (1, 0, -2i)$.