Compito del 11 - 6 - 2013

1. Nella seguente reazione:

$$C_3H_8 + \alpha O_2 \rightarrow \beta CO_2 + \gamma H_2O$$

si determinino i coefficienti α, β, γ, attraverso la risoluzione di un sistema lineare la cui matrice viene denotata con A. Si calcoli successivamente il determinante di A, i suoi autovalori e i corrispondenti autovettori.

Devono valere le relazioni: $2\alpha - 2\beta - \gamma = 0$, $\beta = 3$, $2\gamma = 8$. Pertanto occorre risolvere il sistema:

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha soluzioni: $\alpha = 5, \beta = 3, \gamma = 4$, fornendo la reazione:

$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

Il determinante di A è uguale a 4. Autovalori ed autovettori sono dati da:

$$\lambda = 1 \qquad (2a, a, 0) \quad \forall a$$

$$\lambda = 2 \qquad (b, 0, 0) \quad \forall b$$

Il secondo autovalore ha molteplicità 2.

2. Si disegni la curva $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$, e se ne calcoli la lunghezza.

Il sostegno di γ e un'elica di raggio 2 ed altezza 4π che compie due giri. Dato che $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$, la lunghezza è data da:

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}\ dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{5}\ dt = 4\sqrt{5}\pi$$

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3) = (y, -x, 0)$, definito su tutto lo spazio. Si dica se $\vec{F}$ ammette potenziale. Si calcoli l'integrale di $\vec{F}$ lungo la curva definita nell'esercizio precedente.

$\vec{F}$ non ammette potenziale in quanto: $\partial F_2/\partial x \neq \partial F_1/\partial y$. Per quanto riguarda l'integrale si ha:

$$\int_0^{4\pi} [F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + 0]\, dt =$$

$$\int_0^{4\pi} \left[-4\sin^2 t - 4\cos^2 t + 0\right] dt = -\int_0^{4\pi} 4dt = -16\pi$$

4. Si calcoli il volume del solido che ha altezza costante uguale a 4 e per base l'insieme $I = \{-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$.

L'area di base si calcola ad esempio nel seguente modo:

$$\text{area}(I) = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{e^x} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - \frac{1}{e}$$

Il volume misura dunque 4 volte l'area di I.