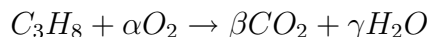


Compito del 11 - 6 - 2013

1. Nella seguente reazione:

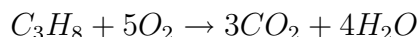


si determinino i coefficienti α , β , γ , attraverso la risoluzione di un sistema lineare la cui matrice viene denotata con A . Si calcoli successivamente il determinante di A , i suoi autovalori e i corrispondenti autovettori.

Devono valere le relazioni: $2\alpha - 2\beta - \gamma = 0$, $\beta = 3$, $2\gamma = 8$. Pertanto occorre risolvere il sistema:

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha soluzioni: $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, fornendo la reazione:



Il determinante di A è uguale a 4. Autovalori ed autovettori sono dati da:

$$\lambda = 1 \quad (2a, a, 0) \quad \forall a$$

$$\lambda = 2 \quad (b, 0, 0) \quad \forall b$$

Il secondo autovalore ha molteplicità 2.

2. Si disegni la curva $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$, e se ne calcoli la lunghezza.

Il sostegno di γ è un'elica di raggio 2 ed altezza 4π che compie due giri. Dato che $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$, la lunghezza è data da:

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{5} dt = 4\sqrt{5}\pi$$

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3) = (y, -x, 0)$, definito su tutto lo spazio. Si dica se \vec{F} ammette potenziale. Si calcoli l'integrale di \vec{F} lungo la curva definita nell'esercizio precedente.

\vec{F} non ammette potenziale in quanto: $\partial F_2/\partial x \neq \partial F_1/\partial y$. Per quanto riguarda l'integrale si ha:

$$\int_0^{4\pi} [F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + 0] dt =$$
$$\int_0^{4\pi} [-4 \sin^2 t - 4 \cos^2 t + 0] dt = - \int_0^{4\pi} 4 dt = -16\pi$$

4. Si calcoli il volume del solido che ha altezza costante uguale a 4 e per base l'insieme $I = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$.

L'area di base si calcola ad esempio nel seguente modo:

$$\text{area}(I) = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{e^x} dy \right) dx = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e}$$

Il volume misura dunque 4 volte l'area di I .