Compito del 14 - 1 - 2020

1. Calcolare gli autovalori e il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Mediante fattorizzazione LU risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (0, 4, 4)$.

Gli autovalori sono: 2,3,4. Il loro prodotto fornisce il determinante, che è pari a 24. La matrice si fattorizza come segue:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Si osservi che il prodotto degli elementi della diagonale di U è uguale al determinante. Si ricava infine: $\vec{x} = (0, 1, 1)$.

2. Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A(t) = \Big(\cos(\pi t/2),\ \sin(\pi t/2)\Big) \qquad t \in [0, 1]$$

$$\vec{\gamma}_B(t) = (1 - t,\ 2 - t) \qquad t \in [1, 2]$$

Se ne calcoli la lunghezza. Si calcoli poi l'integrale lungo $\vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo: $\vec{F}(x, y) = \Big(e^y \cos(xe^y),\ xe^y \cos(xe^y)\Big)$.

La lunghezza risulta essere pari a $\pi/2 + \sqrt{2}$. Il campo ammette potenziale $P(x, y) = \sin(xe^y)$. Dunque il lavoro risulta uguale alla differenza: $P(-1, 0) - P(1, 0) = -2\sin 1$.

3. Trovare la soluzione generale del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

Trovare poi la soluzione soddisfacente $y(0) = 0$ e $z(0) = -5$.

Si considera:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono 2 e 7. Gli autovettori corrispondenti sono: $(a, -2a)$, $(2b, b)$, con a e b arbitrari. La soluzione generale del sistema differenziale è dunque:
$y(t) = ae^{2t} + 2be^{7t}$ $\qquad z(t) = -2ae^{2t} + be^{7t}$.
Imponendo le condizioni per $t = 0$ si deduce che $a = 2$ e $b = -1$.

4. Sia Ω la figura piana espressa in coordinate polari da:

$$\Omega = \{0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta \leq r \leq \pi\}$$

Disegnare Ω sia nel piano (r, θ) che su quello (x, y). Calcolare l'area in entrambi i casi.

Nel piano (r, θ), la figura corrisponde a quella di un triangolo. In tal caso l'area è $\pi^2/2$. Nel piano $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, Ω è la parte compresa tra una spirale a crescita lineare e una semicirconferenza. L'area è data da:

$$\int_0^\pi \int_\theta^\pi r \; drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi^2 - \theta^2)d\theta = \frac{\pi^3}{3}.$$