Compito del 15 - 1 - 2020

1. Sia data la funzione $f : A = [-1,1] \to B$ in modo che:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{se } x \in [-1,0[;\ f(0) = \alpha;\ f(x) = x - 1 \quad \text{se } x \in]0,1]$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to -1^+$, $x \to 0$, $x \to 1^-$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. Al variare di α, dire se f è invertibile, continua, derivabile in A.

Si ha: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$, mentre $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.
La funzione è suriettiva se $B =]-1,0] \cup [1,\infty[\cup \{\alpha\}$. In tale circostanza è invertibile solo se $\alpha \in]-\infty,1] \cup]0,1[$. E' continua e derivabile in A tranne che per $x = 0$. Non è limitata superiormente, per cui $\sup(f) = +\infty$ e il massimo non esiste. Inoltre: $\inf(f) = \min\{-1,\alpha\}$. Il minimo esiste solo se $\alpha \le -1$.

2. Sia $n \ge 1$ un intero fissato. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = xe^{5nx}$$

Chiamato a_n il valore minimo assunto da f, calcolare il limite: $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Si ha che $f < 0$ per $x < 0$, e $f \ge 0$ per $x \ge 0$. Inoltre:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Il calcolo delle derivate fornisce:

$$f'(x) = (1 + 5nx)e^{5nx} \qquad\qquad f''(x) = 5n(2 + 5nx)e^{5nx}$$

da cui si deduce che f assume valore minimo in corrispondenza del punto $x = -1/5n$ e ha un flesso in corrispondenza del punto $x = -2/5n$. Considerato che $a_n = f(-1/5n) = -1/(5ne)$, si ottiene: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3. Per $t \in]-1, 1[$, rappresentare analiticamente e graficamente la funzione:

$$F(t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Calcolare $F(1)$.

Per $t \in [-1, 0]$, si ha:

$$F(t) = \int_{-1}^{t} \frac{dx}{\sqrt{-x}} = -2[\sqrt{-x}]_{-1}^{t} = 2 - 2\sqrt{|t|}$$

da cui $F(0) = 2$. Per $t \in]0, 1]$, si ha poi:

$$F(t) = 2 + \int_{0}^{t} (x-1)dx = 2 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_0^t = \tfrac{1}{2}[(t-1)^2 + 3] = \tfrac{1}{2}t^2 - t + 2$$

Pertanto si ricava $F(1) = 3/2$.

4. Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3\alpha \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Posto $\alpha = 1$, calcolare $\vec{x}$ in modo che $A^2\vec{x} = B\vec{b}$, con $\vec{b} = (-1, 2)$. Trovare α in modo che, con gli stessi dati, tale problema risulti 'impossibile'.

Si ha:

$$A^2\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Si ricava successivamente: $\vec{x} = (-1, 2)$.
Se $\alpha = 2/9$, il determinante di A (e conseguentemente quello di A^2) risulta essere nullo. In tale circostanza è facile controllare che non esistono soluzioni.