Compito del 15 - 2 - 2022

1. Sia data $f : A =]-1,0] \cup [1,2] \to \mathbf{R}$, definita come: $f(x) = x^2$. Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Modificare il codominio in modo che f sia suriettiva e calcolare la sua funzione inversa.

L'immagine di f è l'intervallo $B = [0,4]$, pertanto: $\inf(f)$=$\min(f)$=0 e $\sup(f)$=$\max(f)$=4. La funzione è continua e derivabile su tutto A. Posto B come codominio, si ha: $f^{-1} : B \to A$, con: $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, se $0 \leq y < 1$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, se $1 \leq y \leq 4$.

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \;=\; \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

Determinare l'immagine di f.

La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio. Si annulla per $x = 0$ e si ha:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Inoltre si ricava:

$$f'(x) \;=\; \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

Quindi f' si annulla per $x = e - 1$. In corrispondenza di tale x, f assume il valore massimo uguale a $1/e$. Se ne deduce che l'immagine è $]-\infty, 1/e]$.

3. Esplicitare $G : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ con

$$G(t) = \int_0^t (x+1) f(x)\; dx$$

dove f è definita nell'esercizio **2**. Calcolare poi: $\lim_{t \to +\infty} G(t)$.

Integrando per parti, si ha:

$$G(t) = \int_0^t \ln(x+1)\; dx = \Big[(x+1)\ln(x+1)\Big]_0^t - \int_0^t 1\; dx =$$

$$= (t+1)\ln(t+1) - t$$

Per quanto riguarda il limite può scrivere:

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = \lim_{t\to+\infty} \Big[t(\ln(t+1)-1)+\ln(t+1)\Big] = +\infty$$

4. Discutere al variare del parametro reale γ la risolubilità del sistema lineare:

$$\begin{cases} ix+\gamma y = 3\gamma - 2 \\ 2x - iy = i \end{cases}$$

Il sistema in forma matriciale si scrive:

$$\begin{pmatrix} i & \gamma \\ 2 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\gamma-2 \\ i \end{pmatrix}$$

Trasformato in forma triangolare diventa:

$$\begin{pmatrix} i & \gamma & | & 3\gamma-2 \\ & & | & \\ 0 & i(2\gamma-1) & | & 3i(2\gamma-1) \end{pmatrix}$$

Se $\gamma \neq \frac{1}{2}$ si ottiene una sola soluzione: $(x,y) = (2i,3)$. In caso contrario, se ne ottengono infinite del tipo: $(\frac{1}{2}i(1+y),y)$, con y arbitrario.