Compito del 15 - 7 - 2020

1. Sia definita $f : A =]-\pi, \pi[\to B$ in modo che:

$$f(x) = \sin x \quad \text{se } x \in]-\pi, 0[; \qquad f(x) = 0 \quad \text{se } x \in [0, \pi[$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\sup(f) = \max(f) = 0$ e $\inf(f) = \min(f) = -1$. La funzione è continua in A; è derivabile in A tranne che per $x = 0$. La funzione è suriettiva se $B = [-1, 0]$. La funzione non è invertibile, non essendo essa iniettiva.

2. Sulla semiretta $A =]0, +\infty[$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

Determinare l'immagine di f.

Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

La funzione è continua e derivabile infinite volte nel dominio A. Si ricava:

$$f'(x) = -\frac{x+1}{x^2} e^{-x} \qquad f''(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} e^{-x}$$

Da ciò si deduce che f è positiva, decrescente e convessa. Inoltre f non è limitata superiormente. Non assume dunque valori massimi o minimi.

L'immagine di f è l'insieme $B =]0, +\infty[$. Se si considera $f : A \to B$, tale nuova funzione viene ad essere invertibile.

3. Dato il numero intero $n \geq 1$, si calcoli l'integrale:

$$a_n = \int_1^n x^\alpha dx$$

nei casi in cui: $\alpha = -2$, $\alpha = -1$, $\alpha = 2$.

In detti casi si valuti: $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

Per $\alpha = -2$, si ricava: $a_n = -\Big[x^{-1}\Big]_1^n = -(1/n) + 1$. Per cui si ha: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.
Per $\alpha = -1$, si ricava: $a_n = \Big[\ln x\Big]_1^n = \ln n$. Per cui si ha: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Per $\alpha = 2$, si ricava: $a_n = \frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_1^n = \frac{1}{3}(n^3 - 1)$. Per cui si ha: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

4. Trovare la soluzione $\vec{x} = (x_1, x_2)$ del sistema lineare:

$$\Big[A^{-1}B\Big]\vec{x} = \vec{b}$$

dove $\vec{b} = (2, 2)$ e:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A questo punto, è facile ottenere $\vec{x} = (0, 1)$.
In alternativa, il sistema poteva essere scritto nel seguente modo: $B\vec{x} = A\vec{b} = (0, 2)$, il quale non richiede la conoscenza di A^{-1}.