Compito del 16 - 2 - 2016

1. Fattorizzare la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

nella forma LU. Usare quest'ultima per risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = (2, -6, 2, 2)$. Scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi $n!$, per un dato numero intero n.

Si ricava:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La soluzione di $L\vec{y} = \vec{b}$ fornisce $\vec{y} = (2, -2, 0, 0)$. Infine, la soluzione di $U\vec{x} = \vec{y}$ fornisce $\vec{x} = (1, 1, 0, 0)$.

Per il calcolo di $n!$ si può scrivere ad esempio:

```
prod=1;
  for k=1:n
     prod=prod*k;
  end
prod
```

2. Si disegni la curva $\vec{\gamma}(t) = (e^{2t}\cos t,\ e^{2t}\sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$ e se ne calcoli la lunghezza. Si determini l'integrale lungo $\vec{\gamma}$ del campo $\vec{F}(x, y) = (0, 6y^2)$.

La curva è una spirale che congiunge i punti $(1, 0)$ e $(e^{8\pi}, 0)$ con due giri in senso antiorario. La sua lunghezza è data da:

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{5e^{4t}(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt = \sqrt{5}\int_0^{4\pi} e^{2t} dt = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{8\pi} - 1).$$

Dato che il campo ammette, ad esempio, il potenziale $P(x, y) = 2y^3$, basta calcolare la differenza:

$$P(e^{8\pi}, 0) - P(1, 0) \ = \ 0.$$

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}.$$

soddisfacente $y(0) = 1$ e $z(0) = -3$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = -3$ con autovettori $(2a, -a)$ e $\lambda_2 = 2$ con autovettori $(b, 2b)$, per cui la soluzione generale risulta essere:

$$y(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t} \qquad z(t) = -ae^{-3t} + 2be^{2t}$$

Imponendo le condizioni iniziali si deduce che: $a = 1$ e $b = -1$.

4. Calcolare l'integrale $I = \int_D e^x dxdy$, dove il dominio D è dato da:

$$D = \begin{cases} 0 \le y \le 2x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \\ 0 \le y \le 2 & \text{se } 1 \le x \le 3 \\ \\ 0 \le y \le 5 - x & \text{se } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Ottenere il risultato sia integrando prima rispetto alla variabile y e poi rispetto alla x, sia tramite l'ordine inverso.

Si ha:

$$I = \int_0^1 2xe^x dx + 2\int_1^3 e^x dx + \int_3^5 (5-x)e^x dx = 2 - 2e - e^3 + e^5.$$

Oppure, scrivendo $D = \{0 \le y \le 2,\ y/2 \le x \le 5 - y\}$, si ricava:

$$I = \int_0^2 (e^{5-y} - e^{y/2}) dy = 2 - 2e - e^3 + e^5.$$