Compito del 16 - 2 - 2022

1. Dato il parametro reale α, calcolare gli autovalori e il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Per $\alpha = \pi/2$, mediante fattorizzazione LU, risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, dove $\vec{b} = (1, 2, 4)$.

Gli autovalori sono: $\cos\alpha \pm i \sin\alpha$ e 4. Il loro prodotto fornisce il determinante, che è quindi pari a 4. Per $\alpha = \pi/2$, la matrice è già in forma diagonale dopo aver scambiato fra loro la prima e la seconda riga (pertanto L è la matrice identità). Si tratta quindi di risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione: $\vec{x} = (2, -1, 1)$.

2. Si calcoli il lavoro $\mathcal{L}$ lungo la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = \Big(\cos t,\ t^2,\ \sin t\Big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

immersa nel campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big(e^y,\ (z^2 + x)e^y,\ 2ze^y\Big)$$

Il campo ammette potenziale: $P(x, y, z) = (z^2 + x)e^y$. Dato che $\vec{\gamma}(0) = (1, 0, 0)$ e $\vec{\gamma}(2\pi) = (1, 4\pi^2, 0)$, si ricava $\mathcal{L} = e^{4\pi^2} - 1$.

3. Trovare le soluzioni del sistema differenziale:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Caratterizzare quelle tali per cui il limite per $t \to +\infty$ fornisce un risultato finito.

Gli autovalori e i rispettivi autovettori della matrice sono:

$$\lambda = 3 \quad a(2, 1, 0), \qquad \lambda = -3 \quad b(1, -1, 0), \qquad \lambda = -2 \quad c(0, 0, 1)$$

con a, b, c numeri reali. Ne consegue che:

$$x(t) = 2ae^{3t} + be^{-3t}, \qquad y(t) = ae^{3t} - be^{-3t}, \qquad z(t) = ce^{-2t}$$

Affinché queste tendano ad un limite finito per $t \to +\infty$ si deve necessariamente avere $a = 0$. Gli altri parametri possono rimanere arbitrari.

4. Trovare i valori di massimo e di minimo della funzione $f(x, y) = \sin x \ \sin y$, definita sul quadrato $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Calcolare successivamente l'integrale $I = \int_Q f(x, y) dxdy$.

La funzione è strettamente positiva all'interno di Q e si annulla sul perimetro di Q. Quindi il minimo è zero. All'interno di Q il gradiente di f si annulla solamente al centro $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, dove f assume valore massimo pari a 1.
Per quanto riguarda l'integrale si ottiene:

$$I = \left(\int_0^\pi \sin x \ dx \right) \left(\int_0^\pi \sin y \ dy \right) = 4$$