Compito del 16 - 7 - 2013

1. Mediante fattorizzazione LU si risolva il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Si hanno i passaggi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & -2 & 2 & -2 \\ \mathbf{2} & -2 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & -2 & 2 & -2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -2 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & -2 & 2 & -2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -2 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & -2 \end{pmatrix}$$

dove in neretto sono denotati i coefficienti moltiplicativi delle corrispondenti righe, che prendono provvisoriamente il posto degli zeri. Si ricava infine:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e $(a, b, c, d) = (1, -2, 0, 1)$.

2. Sia dato il campo vettoriale:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

definito ovunque tranne che in $(0, 0, 0)$. Calcolare l'integrale lungo un cammino che porta dal punto $(1, 2, 0)$ all'infinito.

Un potenziale è: $P(x, y, z) = -1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Per il calcolo dell'integrale è sufficiente valutare la differenza di potenziale:

$$\lim_{(x^2+y^2+z^2)\to\infty} P(x, y, z) - P(1, 2, 0) = 0 - P(1, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 7y(t) - 4z(t) \\ \\ z'(t) = 8y(t) - 5z(t) \end{cases}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = 1, z(0) = 0$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = -1$ con autovettori della forma $(a, 2a)$ e $\lambda_2 = 3$ con autovettori della forma (b, b).
Soluzione generale:
$y(t) = ae^{-t} + be^{3t} \quad z(t) = 2ae^{-t} + be^{3t}$
Soluzione soddisfacente le condizioni iniziali:
$y(t) = -e^{-t} + 2e^{3t} \quad z(t) = -2e^{-t} + 2e^{3t}$

4. Calcolare:

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

dove $D = \{-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$ e $f(x, y) = x^3 y^2$.

Posto:

$D_1 = \{-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1+x\}$ $D_2 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$

si ricava $D = D_1 \cup D_2$. La funzione è dispari rispetto ad x (cioè $f(x, y) = -f(-x, y)$), per cui $\int_{D_1} f = -\int_{D_2} f$ e dunque:

$$\int_D f \;=\; \int_{D_1} f \;+\; \int_{D_2} f \;=\; 0$$

Anche se non necessario, si possono esplicitare i conti, per cui, ad esempio:

$$\int_{D_2} f dx dy \;=\; \int_0^1 (\int_0^{1-x} x^3 y^2 dy) dx \;=\; \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3 x^3 dx \;=\; \frac{1}{420}$$