Compito del 17 - 1 - 2017

1. Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare A^2 e A^{-1}. Calcolare gli autovalori e gli autovettori di A, A^2 e A^{-1}. Risolvere il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = (0, -7)$.
Scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi il prodotto dei numeri pari da 4 a 18 (estremi inclusi).

Si ha:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono 2 e 7, quelli di A^2 sono 4 e 49, quelli di A^{-1} sono $1/2$ e $1/7$. Gli autovettori sono: $a(-1,2)$ e $b(2,1)$, con a e b arbitrari. Si ricava infine: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = (1, -3)$.
Per il calcolo del prodotto si può scrivere ad esempio:

```
prod=4;
  for k=3:9
     prod=prod*2*k;
  end
prod
```

2. Nel piano (x, y), proporre l'espressione di una curva $\vec{\gamma}$ che congiunge i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ senza passare per l'origine. Calcolare successivamente il lavoro lungo $\vec{\gamma}$ quando:

$$\vec{F}(x, y) = (\cos y, -x \sin y)$$

Calcolare infine la divergenza di $\vec{F}$ nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

Il campo ammette potenziale $P(x, y) = x \cos y$. Dunque il lavoro risulta uguale alla differenza: $P(1, 0) - P(-1, 0) = 2$. Si ha che $\mathrm{div}\vec{F} = -x \cos y$, che in $(-1, 0)$ vale 1 e in $(1, 0)$ vale -1.

3. Tra le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = e^t y^2(t)$$

trovare quella che tende ad infinito per t che tende ad 1. In tal caso quanto vale $y(0)$?

Per separazione di variabili, si ricava: $y(t) = -1/(e^t + c)$, con c arbitraria. Per ottenere una singolarità quando $t = 1$ occorre avere $c = -e$, per cui $y(t) = 1/(e - e^t)$. Infine: $y(0) = 1/(e - 1)$.

4. Sia dato il dominio K espresso in coordinate polari da:

$$K = \{0 < \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq \theta + 1\}$$

Disegnare K nel piano (x, y) e calcolare la corrispondente area (cioè l'integrale della funzione f uguale ad 1).

Si ha:

$$\int_K f\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta+1} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\theta+1)^2}{2} d\theta = \frac{1}{6}[(2\pi + 1)^3 - 1]$$