Compito del 17 - 2 - 2015

1. Studiare al variare del parametro α la risolubilità del sistema lineare:

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ \alpha y + z &= -\alpha \\ -x+z &= -2 \end{cases}$$

Si introducono, la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il vettore $\vec{b} = (1, -\alpha, -2)$. Il determinante di A è diverso da zero quando $\alpha \neq 1$. In tal caso l'unica soluzione viene ad essere: $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.
Se $\alpha = 1$ ci sono infinite soluzioni della forma: $x = a$, $y = 1 - a$, $z = -2 + a$ (tra cui anche quella di prima).

2. Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A = (\cos t,\ \sin t) \qquad t \in [0, \tfrac{3}{2}\pi]$$

$$\vec{\gamma}_B = (t - \tfrac{3}{2}\pi,\ t - \tfrac{3}{2}\pi - 1) \qquad t \in [\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi + 1]$$

Se ne calcoli la lunghezza. Si calcoli poi l'integrale lungo $\vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(e^{y^2},\ 2xye^{y^2}\right).$$

La lunghezza risulta essere pari a: $\frac{3}{2}\pi + \sqrt{2}$. Il campo ammette potenziale $P(x,y) = xe^{y^2}$. Il lavoro è nullo in quanto la curva è chiusa.

3. Trovare la soluzione $y > 0$ del problema differenziale:

$$y'(t) = 2t\ \mathrm{tg}(y(t)), \qquad y(0) = \pi/2.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{\cos y}{\sin y}\ y' = 2t$$

Integrando si ricava $\ln(\sin y(t)) = t^2 + c_1$, da cui $\sin y(t) = c_2 e^{t^2}$, con c_1 e $c_2 > 0$ costanti arbitrarie. Si ha infine: $y(t) = \arcsin(c_2 e^{t^2})$. Dalle condizioni iniziali si deduce che $c_2 = 1$.

4. Dato il dominio $D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$, calcolare:

$$I = \int_D y \ln x \; dxdy.$$

Si ha:

$$I = \int_0^1 \tfrac{1}{2}x \ \ln x \ dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 \ \ln x - \tfrac{1}{8}x^2\right]_0^1 = -\tfrac{1}{8}$$

dove si è integrato per parti.