Compito del 17 - 6 - 2020

1. Dato il parametro $\gamma > 0$, sia definita $f : A = [-1, 1] \to B$ in modo che:

$$f(x) = \gamma(x+1) \quad \text{se } x \in [-1, 0[; \qquad f(0) = 0;$$
$$f(x) = -(x-1)^2 \quad \text{se } x \in]0, 1]$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\sup(f) = \gamma$ e $\inf(f) = -1$. Non vi sono massimi e minimi. La funzione è continua e derivabile in A tranne che per $x = 0$. La funzione è suriettiva se $B =]-1, \gamma[$. Dato che $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, la funzione non è invertibile, non essendo essa iniettiva.

2. Dato l'insieme $A =]0, 2\pi[$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, tale per cui:

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$$

Determinare l'immagine di f.

Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = +\infty$$

Si ha l'annullamento di f per $x = \frac{1}{2}\pi$ e $x = \frac{3}{2}\pi$. La funzione è continua e derivabile infinite volte nel dominio A. Si ricava:

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

Dunque, la derivata prima si annulla solo per $x = \pi$ e si ha: $f(\pi) = -\frac{1}{2}$. La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]0, \pi[$, ed è strettamente crescente nell'intervallo $]\pi, 2\pi[$. Pertanto, in corrispondenza di $x = \pi$ vi è un punto di minimo assoluto. La derivata seconda di f risulta essere sempre positiva, per cui f è strettamente convessa. L'immagine di f è l'insieme $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

3. Rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G_\gamma(t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx \qquad t \in [-1, 1]$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Calcolare poi il limite $\lim_{\gamma\to 2} G_\gamma(1)$.

La discontinuità della funzione f non crea problemi per la sua integrazione. Per $-1 \le t \le 0$, si ha:

$$G_\gamma(t) = \int_{-1}^{t} \gamma(x+1)\ dx = \tfrac{1}{2}\gamma(t+1)^2$$

Per $0 \le t \le 1$, si ha invece:

$$G_\gamma(t) = G_\gamma(0) - \int_{0}^{t} (x-1)^2\ dx = \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{3}(t-1)^3 - \tfrac{1}{3}$$

da cui si ricava: $G_\gamma(1) = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{3}$.
Si può infine calcolare il limite: $\lim_{\gamma\to 2} G_\gamma(1) = \frac{2}{3}$.

4. Mediante trasformazione in forma triangolare superiore, risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha+2 \\ 2\alpha-1 \end{pmatrix}$$

Determinare il valore del parametro reale α in modo che il vettore (x_1, x_2, x_3) sia ortogonale a $(-1, 8, 3)$.

Il sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha+2 \\ \frac{7}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

La cui soluzione risulta essere: $(\alpha, 1, -\alpha)$. Il prodotto scalare tra (x_1, x_2, x_3) e $(-1, 8, 3)$ viene ad essere pari a $8 - 4\alpha$. Questa ultima espressione è nulla quando $\alpha = 2$.