Compito del 18 - 2 - 2014

1. Data la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo determinante e i suoi autovalori. Determinare A^{-1} e risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (3, 4, 4)$. Dire infine se esistono vettori tali per cui $A\vec{v} = 5\vec{v}$.

Il determinante vale 24, gli autovalori sono: 2,3,4. La matrice inversa è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Si ha: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = (1, 1, 1)$. A parte $\vec{v} = (0, 0, 0)$ non si hanno vettori per i quali $A\vec{v} = 5\vec{v}$, in quanto 5 non compare nella lista degli autovalori.

2. Una carica puntiforme positiva q è posta in $(0, 0, 0)$. Calcolare il lavoro necessario a spostare una carica di prova negativa (di intensità trascurabile rispetto a q) lungo la curva $\gamma = \gamma_A \cup \gamma_B$, dove:

$$\gamma_A(t) = (-\cos \pi t,\ \sin \pi t,\ 0) \qquad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_B(t) = (t,\ 0,\ 0) \qquad t \in [1, 2]$$

Il potenziale elettrico è dato da $P(x, y, z) = Kq/r$, con $K = 1/4\pi\epsilon_0$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Il lavoro lungo γ_A è nullo perchè tutti i punti della curva sono allo stesso potenziale. Il lavoro lungo γ_B è dato da:

$$P(2, 0, 0) - P(1, 0, 0) = Kq(\tfrac{1}{2} - 1) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0}$$

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) - z(t) \end{cases}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = 4, z(0) = 2$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = 1$ con autovettori (a, a); $\lambda_2 = -3$ con autovettori $(b, -b)$.
Soluzione generale:
$y(t) = ae^t + be^{-3t} \qquad z(t) = ae^t - be^{-3t}$
Soluzione soddisfacente le condizioni iniziali:
$y(t) = 3e^t + e^{-3t} \qquad z(t) = 3e^t - e^{-3t}$

4. Si calcoli l'integrale della funzione $f(x, y) = xy$ sul dominio D ottenuto sottraendo il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ dal triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$.

Si ha:

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} xy\ dxdy \ - \ \int_0^1 \int_0^1 xy\ dxdy \ =$$
$$= \ \int_0^3 \frac{x}{2}(3-x)^2 dx \ - \ \int_0^1 \frac{x}{2}\ dx \ = \ \frac{25}{8}$$