Compito del 19 - 2 - 2013

1. Sia data la matrice: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare i suoi autovalori, i corrispondenti autovettori, la sua fattorizzazione LU, il suo determinante e la sua inversa. Risolvere infine il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, dove $\vec{b} = (0, 1)$.

Autovalori e autovettori:
$\lambda_1 = 5 + \sqrt{2}$ e $\vec{v} = (a, -a(1 - \sqrt{2}))$
$\lambda_2 = 5 - \sqrt{2}$ e $\vec{v} = (a, -a(1 + \sqrt{2}))$

Fattorizzazione: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/6 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 23/6 \end{pmatrix}$

Determinante $= 23$

Inversa: $A^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Soluzione: $\vec{x} = (-1/23, 6/23)$

2. Calcolare l'integrale del campo:

$$\vec{F}(x, y) \ = \ (F_1, F_2) \ = \ (\sin y^2,\ 2xy \cos y^2)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t^2, \log(t + 1))$, $t \in [0, 1]$.
Posto poi $\vec{G} = (F_1, F_2, 0)$, determinare $\mathrm{rot}\vec{G}$.

Il campo ammette potenziale $P(x, y) = x \sin y^2$. Quindi:

$$\int_\gamma \vec{F} \ = \ P(\gamma(1)) - P(\gamma(0)) = P(1, \log 2) - P(0, 0) = \sin(\log 2)^2$$

Infine: $\mathrm{rot}\vec{G} = \Big(0,\ 0,\ \partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y\Big) = (0, 0, 0)$

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) - 2z(t) \\ \\ z'(t) = -2y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = 1, z(0) = 0$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = 2$ con autovettori $(a, 2a)$ e $\lambda_2 = 7$ con autovettori $(b, -b/2)$

Soluzione generale:
$y(t) = ae^{2t} + be^{7t} \qquad z(t) = 2ae^{2t} - \frac{1}{2}be^{7t}$
Soluzione soddisfacente le condizioni iniziali:
$y(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{7t} \qquad z(t) = \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{7t}$

4. Si calcoli il volume del solido S che si ottiene ruotando il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}e^{x^2}$, $x \in [0, 2]$, intorno all'asse x.

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_0^2 \pi f^2(x)dx = \pi \int_0^2 xe^{2x^2}dx = \frac{\pi}{4}\left[e^{2x^2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}(e^8 - 1)$$