Compito del 19 - 2 - 2019

1. Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare i suoi autovalori e il suo determinante. Determinare A^{-1} e risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (4, 2, 5)$. Dire infine se esistono vettori tali per cui $A\vec{v} = 4\vec{v}$.

Gli autovalori sono: 1,2,3, per cui il determinante vale 6. La matrice inversa è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Si ha: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = (1, 1, 2)$. A parte $\vec{v} = (0, 0, 0)$ non si hanno vettori per i quali $A\vec{v} = 4\vec{v}$, in quanto 4 non compare nella lista degli autovalori.

2. Siano dati il campo $\vec{F}(x, y, z) = (e^y z^2, xe^y z^2, 2xze^y)$ e le due curve:

$$\vec{\gamma}_1(t) = (t,\ t,\ t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = \Big(\mathrm{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t),\ t,\ 1 - \cos(\tfrac{1}{2}\pi t)\Big), \quad t \in [0, 1]$$

Seguendo quale di esse si compie maggior lavoro?

Il campo ammette potenziale $P(x, y, z) = xe^y z^2$. Entrambe le curve hanno come punto iniziale $A = (0, 0, 0)$ e punto finale $B = (1, 1, 1)$. Il lavoro lungo esse è il medesimo e vale: $P(B) - P(A) = e$.

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) - z(t) \end{cases}$$

soddisfacente le condizioni $y(0) + z(0) = 2$ e $y'(0) - z'(0) = 6$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = 1$ con autovettori (a, a); $\lambda_2 = -3$ con autovettori $(b, -b)$. ciò fornisce la soluzione generale: $y(t) = ae^t + be^{-3t}$, $z(t) = ae^t - be^{-3t}$.

Dalle condizioni per $t = 0$ si ricava: $a = 1$ e $b = -1$. Pertanto, si ha infine: $y(t) = e^t - e^{-3t}$, $z(t) = e^t + e^{-3t}$.

4. Data la funzione $f(x, y) = x(2 - x) + y$, definita sul rettangolo:

$$R_{a,b} = \{0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\} \qquad \text{con } \ 0 \leq a \leq 4,\ 0 \leq b \leq 1$$

si determinino e si cataloghino i punti stazionari della funzione di due variabili:

$$I(a, b) = \int_{R_{a,b}} f(x, y)\ dxdy.$$

E' facile ricavare che: $I(a, b) = b\Big(a^2 - \frac{1}{3}a^3\Big) + \frac{1}{2}ab^2$. Per cui:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = ba(2 - a) + \tfrac{1}{2}b^2, \qquad \frac{\partial I}{\partial b} = a^2 - \tfrac{1}{3}a^3 + ab.$$

Il gradiente si annulla nei seguenti punti: $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (\frac{9}{5}, -\frac{18}{25})$. Si noti però che l'ultimo non rientra nel dominio delle coppie (a, b) ammissibili. Per quanto riguarda la matrice Hessiana, si ha:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H(3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso H è indefinita, nel secondo caso $\det(H) < 0$, per cui si è in presenza di un punto sella (che tuttavia appartiene al bordo del dominio).