Compito del 2 - 2 - 2021

1. Dato il parametro $-1 < \alpha < 1$, sia $f :]-1,1] \to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = x, \quad x \in]-1,0[; \qquad f(0) = \alpha; \qquad f(x) = 1-x, \quad x \in]0,1]$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare l'immagine di f. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\inf(f) = -1$ e $\sup(f) = 1$. Il massimo e il minimo non esistono. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio tranne che per $x = 0$. L'immagine di f consiste nell'insieme $B =]-1,1[$. Indipendentemente dal valore di α, anche assumendo che il codominio di f sia B, la funzione non è invertibile, non essendo essa iniettiva.

2. Posto $A = [0,\pi[$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Determinare l'immagine B di f. Dire se la nuova funzione $f : A \to B$ risulta essere invertibile.

La funzione è continua e limitata. Il calcolo delle derivate fornisce:

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x$$

$$f''(x) = -e^{\sin x} \sin x + e^{\sin x} \cos^2 x = -(\sin^2 x + \sin x - 1)e^{\sin x}$$

Si conclude che la funzione è crescente in $[0,\pi/2[$ e decrescente in $A =]\pi/2,\pi[$. In $x = \pi/2$ si realizza il massimo assoluto. Ci sono due punti di flesso corrispondenti agli x per i quali $\sin x = (-1+\sqrt{5})/2$. Al crescere di x, la funzione è dapprima convessa, poi concava, e poi ancora convessa. L'immagine è il segmento $B = [1,e]$. La funzione non è invertibile.

3. Rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx \qquad t \in [-1,1]$$

dove f è definita nell'esercizio **1**.

Si noti che il valore di f per $x = 0$ non ha influenza sul calcolo dell'integrale. Per $-1 \leq t \leq 0$, si ha:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} x dx = \frac{t^2 - 1}{2}$$

In particolare: $G(0) = -1/2$. Per $0 \leq t \leq 1$, si ha invece:

$$G(t) = G(0) + \int_{0}^{t} (1 - x) dx = -\frac{(1 - t)^2}{2}$$

In particolare: $G(1) = 0$ (somma algebrica di aree di due triangoli congruenti e giacenti su semipiani opposti rispetto all'asse x).

4. Mediante il metodo di eliminazione gaussiana, calcolare la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y + iz = 1 + 2i \\ 2ix - z = -2 \\ x + y + z = 1 + i \end{cases}$$

dove i rappresenta l'unità immaginaria.

In forma matriciale il sistema si riscrive come:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & i & 1 + 2i \\ 2i & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 + i \end{array}\right)$$

Esso si trasforma in forma triangolare nella seguente maniera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & i & 2i + 1 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{2}i & 0 \end{array}\right)$$

La soluzione del sistema è dunque: $(x, y, z) = (i, 1, 0)$.