Compito del 20 - 1 - 2021

1. Calcolare autovalori ed autovettori della matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

nei tre seguenti casi: $\gamma = 7$, $\gamma = 5$, $\gamma = 3$.

Per $\gamma = 7$ si hanno autovalori reali e distinti: $\lambda_1 = 5 + \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 5 - \sqrt{3}$. I corrispettivi autovettori sono: $a(1, -2 - \sqrt{3})$, $b(1, -2 + \sqrt{3})$, con a e b numeri reali arbitrari.
Per $\gamma = 5$ si ha un solo autovalore $\lambda = 4$ di molteplicità 2. I corrispettivi autovettori sono: $a(1, -1)$, con a numero reale arbitrario.
Per $\gamma = 3$ si hanno gli autovalori complessi e coniugati: $\lambda_1 = 3 + i$ e $\lambda_2 = 3 - i$. I corrispettivi autovettori sono: $a(1, -i)$, $b(1, i)$, con a e b numeri complessi arbitrari.

2. Sia data la curva composta dai due pezzi:

$\vec{\gamma}_A(t) = (t, 2t - t^2) \quad t \in [0, 1]$; $\qquad \vec{\gamma}_B(t) = (2 - t, 2 - t) \quad t \in [1, 2]$

immersa nel campo $\vec{F}(x, y) = (y, 3x)$. Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ lungo detta curva.

La curva è chiusa ($\vec{\gamma}_A(0) = \vec{\gamma}_B(2)$). Si verifica facilmente che il campo non è conservativo, per cui non è detto che il lavoro sia nullo. Si ha: $\vec{\gamma}'_A(t) = (1, 2 - 2t)$, $\vec{\gamma}'_B(t) = (-1, -1)$. Dunque:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \Big[(2t - t^2) + 3t(2 - 2t)\Big]dt + \int_1^2 \Big[-(2 - t) - 3(2 - t)\Big]dt =$$

$$= \int_0^1 (-7t^2 + 8t)dt + \int_1^2 (4t - 8)dt = -\tfrac{1}{3}.$$

3. Per $t \geq 0$, trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{1}{y(t) + 2}$$

con la condizione $y(0) = 2$.

L'equazione è a variabili separabili (basta portare a sinistra il denominatore di destra). Si ha:

$$\int y'(t)(y(t) + 2)dt = \int 1dt + c = t + c$$

dove c è una costante arbitraria. Proseguendo nei conti si ricava:

$$\tfrac{1}{2}y^2(t) + 2y(t) = t + c \quad \Rightarrow \quad y^2(t) + 4y(t) - 2(t+c) = 0$$

Sfruttando la condizione iniziale si ottiene $c = 6$. Si risolve infine l'equazione di secondo grado, ricavando:

$$y(t) = -2 \pm \sqrt{2t + 16}$$

Affinché $y(0)$ valga 2, l'unica soluzione accettabile delle due proposte è quella con il segno $+$.

4. Sia D l'insieme ottenuto sottraendo il cerchio di centro l'origine e raggio 1 dal quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Calcolare:

$$I = \int_D y \; dxdy$$

L'insieme può essere descritto nel seguente modo:

$$D = \left\{ 0 \leq x \leq 1, \; \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1 \right\}$$

Pertanto:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 y \; dy \right) dx = \int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2 \; dx = \tfrac{1}{6}$$

In alternativa si può calcolare prima l'integrale su tutto il quadrato:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} y \; dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 y \; dy \right) dx = \tfrac{1}{2}$$

e da esso sottrarre l'integrale su un quarto di cerchio, svolgendo il conto in coordinate polari:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \rho \sin\theta \; d\theta \right) \rho d\rho \; = \int_0^1 \rho^2 \; d\rho = \tfrac{1}{3}$$

anche in questo caso il risultato finale risulta essere $\frac{1}{6}$.