Compito del 20 - 7 - 2021

1. Data $f :]\frac{1}{2\pi}, +\infty[\to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare l'immagine di f. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

La funzione è limitata ed assume valori tra -1 e 1. In particolare $f(\frac{2}{3\pi}) = -1$ risulta essere il valore minimo (come pure l'estremo inferiore), mentre $f(\frac{2}{\pi}) = 1$ è quello massimo (ed estremo superiore). Se ne deduce che l'immagine è $B = [-1, 1]$. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio. Pur assumendo che il codominio sia B, la f così modificata non risulta essere invertibile in quanto non iniettiva.

2. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) = e^{1/x} \quad \text{per } x \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

Designata con B l'immagine di f, dire se la nuova funzione $f : \mathbf{R} \to B$ è invertibile.

Si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Da ciò si deduce che f non è continua in $x = 0$. Essa è decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$ (ma non su tutto $\mathbf{R}$). Infatti, nei suddetti intervalli, la derivata $f'(x) = -e^{1/x}/x^2$ è strettamente negativa. Si ha: $B = [0, 1[\cup]1, +\infty[$. La funzione $f : \mathbf{R} \to B$ risulta essere invertibile e si ricava: $f^{-1}(y) = 1/\ln y$, per $y \geq 0$ e $y \neq 1$.

3. Calcolare $\lim_{t\to+\infty} G(t)$ dove G è data da

$$G(t) = \int_{1/\pi}^{t} \frac{f(x)}{x^2}\, dx \qquad\qquad t \geq 1/\pi$$

e f è definita nell'esercizio **1**.

Operando la sostituzione $z = 1/x$ (e dunque $dz = -dx/x^2$), si ricava:

$$G(t) = \int_{1/\pi}^{t} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx = -\int_{\pi}^{1/t} \sin z\, dz = \Big[\cos z\Big]_{\pi}^{1/t} = \cos\frac{1}{t} + 1$$

Infine:

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = 2.$$

4. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, applicando l'algoritmo di eliminazione Gaussiana, si discuta l'esistenza delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - z = 2 \\ x + \alpha y + 2z = 1 - \alpha \\ -x + 3z = -1 \end{cases}$$

In forma matriciale il sistema si riscrive come:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 & 1-\alpha \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Con i dovuti passaggi esso si trasforma in forma triangolare nella seguente maniera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \alpha & \frac{5}{2} & -\alpha \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Questo porta alle relazioni: $z = 0$, $\alpha y = -\alpha$, $x = 1$. Se $\alpha \neq 0$ il sistema ammette l'unica soluzione: $(1, -1, 0)$. Altrimenti, vi sono infinite soluzioni della forma $(1, y, 0)$, con y arbitrario.