Compito del 21 - 2 - 2017

1. Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dire se esistono dei vettori che vengono trasformati (tramite l'applicazione di A) in 5 volte se stessi e se esistono dei vettori che vengono trasformati nel vettore $(4, 7, 0)$.
Per $a = 10$, $a = 20$ e $a = 30$, dato $x_1 = 4$, scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi x_8, attraverso la successione: $x_{n+1} = x_n^3 + a, \ \ n \geq 1$.

Gli autovalori di A sono $1, 2, 3$. Tra essi non vi è il valore 5, pertanto la prima domanda ha come unica soluzione il vettore $(0, 0, 0)$. Nel secondo caso si ha un'unica soluzione data da: $(-1, 2, 0)$.
Per il calcolo del termine x_8 della successione si può scrivere ad esempio:

```
a=10;
for i=1:3
successione=4;
  for k=1:7
     successione=successione^3+a;
  end
successione
a=a+10;
end
```

2. Per $(x, y) \neq (0, 0)$, calcolare il rotore del campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \ \frac{x}{x^2 + y^2}, \ 0 \right)$$

Calcolare poi il lavoro lungo la curva $\vec{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t, 5)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Il rotore è nullo. Per quanto riguarda il lavoro, si ha:

$$L = \int_0^{2\pi} [-(\cos t)^2 - (\sin t)^2] dt = -2\pi.$$

3. Per $t \geq 0$, risolvere il sistema differenziale non lineare:

$$y'(t) = -y^2(t) \qquad\qquad y(0) = 1$$

$$z'(t) = z(t) + \frac{1}{y(t)} \qquad z(0) = -1.$$

Risolvendo la prima equazione, mediante separazione di variabili, si ottiene: $y(t) = 1/(t+1)$.
Sostituendo y nella seconda equazione, occorre risolvere: $z'(t) = z(t) + t + 1$, la quale porta alla soluzione: $z(t) = e^t - t - 2$.

4. Sia Ω il dominio ottenuto sottraendo dal quarto di cerchio di raggio pari a 3, situato nel primo quadrante, il triangolo T con vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$. Calcolare l'integrale su Ω della funzione $f(x,y) = 2y$.

Si ha:

$$\int_\Omega 2y\ dxdy = \int_0^2 \left(\int_{1-x/2}^{\sqrt{9-x^2}} 2y\ dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} 2y\ dy \right) dx =$$

$$\int_0^2 [9 - x^2 - (1 - x/2)^2]\ dx + \int_2^3 (9 - x^2)\ dx = 18 - \frac{2}{3}.$$