Compito del 21 - 2 - 2018

1. Si risolva il sistema lineare mediante fattorizzazione LU:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Successivamente si calcoli il determinante d della matrice.

Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Posto $\vec{b} = (2, -3, 1, 2)$ e $\vec{y} = L^{-1}\vec{b}$, si ottiene $\vec{y} = (2, -1, -3, 3)$. Infine $\vec{x} = U^{-1}\vec{y} = (1, -2, 0, 1)$ è la soluzione richiesta. Per quanto riguarda il determinante, basta eseguire il prodotto dei termini della diagonale di U, ricavando $d = -6$.

2. Si consideri la curva individuata dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A(t) = (\sqrt{1+t}\cos t, \sqrt{1+t}\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{\gamma}_B(t) = (\sqrt{1+4\pi-t}\cos t, \sqrt{1+4\pi-t}\sin t) \qquad t \in [2\pi, 4\pi]$$

Dato il campo $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, si calcoli il lavoro lungo $\vec{\gamma}$.

Il calcolo del lavoro segue dal conto esplicito (si noti che la curva è chiusa ma $\vec{F}$ non è conservativo):

$$\int_0^{2\pi} (1+t)dt + \int_{2\pi}^{4\pi} (1+4\pi-t)dt = 4\pi(1+\pi).$$

3. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{2t^3}{y(t)-1}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = 2$.

Separando le variabili, si ottiene:

$$\int y'(t)(y(t)-1)dt = \int 2t^3 dt + c = \tfrac{1}{2}t^4 + c$$

da cui:

$$\tfrac{1}{2}y^2(t) - y(t) = \tfrac{1}{2}t^4$$

in quanto risulta che deve essere $c = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado $y^2(t) - 2y(t) - t^4 = 0$, si ricava $y(t) = 1 + \sqrt{1+t^4}$ (l'altra radice dell'equazione non è compatibile con la condizione $y(0) = 2$).

4. Si decomponga il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ nelle due parti:

$$A = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

$$B = \{0 \le x \le 1,\ \sqrt{x} \le y \le 1\} = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\}.$$

Si calcolino i volumi V_A e V_B dei solidi ottenuti facendo ruotare A attorno all'asse x e B attorno all'asse y.

Si ha:

$$V_A = \pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi}{2} \qquad V_B = \pi \int_0^1 y^4 dy = \frac{\pi}{5}.$$