Compito del 23 - 2 - 2021

1. Data $f :]-1,1] \to B \subset \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = \mathrm{tg}(x), \quad x \in]-1,0]; \qquad\qquad f(x) = x, \quad x \in]0,1]$$

determinare B in modo che corrisponda all'immagine di f. Mostrare che f è invertibile e determinare l'espressione della sua inversa. Dire se f^{-1} è continua e/o derivabile.

La funzione f è continua, derivabile e crescente in tutto il dominio. In particolare $f'(0) = 1$. Si ha $B =]-\mathrm{tg}(1), 1]$. Inoltre, per $y = f(x)$, si ricava:

$$f^{-1}(y) = \mathrm{arctg}(y), \quad y \in]-\mathrm{tg}(1), 0]; \qquad\qquad f^{-1}(y) = y, \quad y \in]0,1]$$

Quest'ultima funzione è continua, derivabile e crescente in tutto B.

2. Determinare l'immagine B della funzione $f : A = [1, +\infty[\to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x-6}}{x}$$

La f è sempre positiva tranne che per $x = 1$, per cui $\min(f) = 0$. Si ha inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad\qquad f'(x) = \frac{12-5x}{2x^2\sqrt{x^2+5x-6}}$$

La derivata si annulla per $x = 12/5$. Risulta dunque che $\max(f) = f(12/5) = \sqrt{294}/12$, per cui $B = [0, \sqrt{294}/12]$. Si osservi che f è continua per cui assume di fatto tutti i valori fra il minimo e il massimo.

3. Rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G(t) = \int_0^t f(x)dx \qquad\qquad t \in [-1,1]$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Calcolare $G(-1)$ e $G(1)$.

Per $-1 \le t \le 0$, si ha:

$$G(t) = -\int_t^0 \mathrm{tg}(x)dx = \Big[\ln(\cos x)\Big]_t^0 = -\ln(\cos t)$$

Si noti che nell'intervallo considerato si ha $0 < \cos t \leq 1$, per cui $G(t) \geq 0$ (anche se f è negativa). Si ottiene dunque: $G(-1) = -\ln(\cos 1) > 0$. Per $0 \leq t \leq 1$, si ha invece:

$$G(t) = \int_0^t x\,dx = \tfrac{1}{2}t^2$$

Si ha infine: $G(1) = \frac{1}{2}$.

4. Date le matrici:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare: $A = B^{-1}\Lambda B$, A^4, A^8, $\det(A^8)$.

Si ha:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che: $A^2 = (B^{-1}\Lambda B)(B^{-1}\Lambda B) = B^{-1}\Lambda(BB^{-1})\Lambda B = B^{-1}\Lambda^2 B$. In generale: $A^n = B^{-1}\Lambda^n B$, per ogni intero $n \geq 1$. Con quest'ultima formula si ricava facilmente:

$$A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^8 = \begin{pmatrix} 256 & 255 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerato che $\det(A^n) = \det(B^{-1})\det(\Lambda^n)\det(B) = \det(\Lambda^n) = 2^n$, si ottiene in particolare: $\det(A^8) = 256$.