Compito del 24 - 2 - 2021

1. Assegnato il parametro $\alpha \geq 0$, mediante fattorizzazione LU, risolvere il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = (2, 3, -2)$$

Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = 4$, si ottiene come unica soluzione $\vec{x} = (2, 1, 0)$. Se invece $\alpha = 4$, si ricavano infinite soluzioni del tipo: $\vec{x} = (2+3\gamma, 1, \gamma)$, dove γ è un parametro reale.

2. Per una generica funzione g, sia data la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = \Big(g(t)\cos t,\ g(t)\sin t\Big), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

immersa nel campo $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$. Calcolare il corrispondente lavoro $\mathcal{L}$ in funzione di g. Esplicitare il conto per $g(t) = t^5$.

Il campo non ammette potenziale. Si ha:

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \Big[- g(t)\sin t\Big(g'(t)\cos t - g(t)\sin t\Big) +$$

$$+ g(t)\cos t\Big(g'(t)\sin t + g(t)\cos t\Big)\Big] dt = \int_0^{2\pi} g^2(t) dt.$$

Se $g(t) = t^5$, si ricava: $\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} t^{10} dt = (2\pi)^{11}/11$.

3. Per $t \geq 0$, sia y la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{1}{1 + t\, y(t)}$$

con $y(0) = 0$. Studiare qualitativamente il comportamento di y.

L'equazione in questione non è a variabili separabili. Si ha $y'(0) = 1$. Ne consegue che y è positiva per $t > 0$ sufficientemente piccolo. Dato che l'equazione fornisce l'implicazione: $y(t) > 0 \Rightarrow y'(t) > 0$, ne risulta che la y è sempre crescente e positiva. Inoltre, il fatto che y sia crescente, implica che y' è decrescente, cioè che y è concava. Ciò si può anche constatare dal calcolo della derivata seconda:

$$y''(t) = - \frac{y(t) + t\, y'(t)}{(1 + t\, y(t))^2}$$

dove, nella frazione, sia il numeratore che il denominatore sono positivi, da cui $y'' < 0$ per $t > 0$.

4. Sia $f(x, y) = xe^{-y}$ definita sull'insieme:

$$D = \left\{ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \right\}$$

Trovare $\max(f)$ e $\min(f)$. Calcolare inoltre: $I = \int_D f(x, y)\ dxdy$.

Il gradiente $\nabla f = (e^{-y}, -xe^{-y})$ non ha punti di annullamento all'interno di D. La funzione vale zero sull'asse y e cresce come x lungo l'asse x. Per quanto riguarda il bordo parabolico, si ricava:

$$f(x, 1 - x^2) = g(x) = xe^{x^2 - 1}.$$

Dato che $g'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2-1} > 0$, si deduce che f ammette massimo pari ad 1, nel punto $(1, 0)$. La f ammette minimo pari a zero per tutti i punti di D che appartengono all'asse y.
Per quanto riguarda infine l'integrale, si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} xe^{-y}\, dy \right) dx = \int_0^1 x(1 - e^{x^2-1}) dx = \frac{1}{2e}.$$