Compito del 25 - 1 - 2022

1. Sia data $f : [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[\cup]\frac{1}{2}\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, definita come:

$f(x) = |\sin x|$ se $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ $\qquad f(x) = x - \frac{1}{2}\pi$ se $x \in]\frac{1}{2}\pi, \pi]$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile.

L'immagine di f è $B = [0, \frac{1}{2}\pi]$, per cui: $\sup(f)=\frac{1}{2}\pi$, $\inf(f)=0$, $\max(f)=\frac{1}{2}\pi$, $\min(f)=0$. La funzione è continua su tutto il dominio. La funzione è derivabile su tutto il dominio tranne che nel punto $x = 0$.

2. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \ = \ \frac{x+1}{x^2+5x+8}$$

Determinare l'immagine di f.

La funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbf{R}$. Si ha:

$$f'(x) = -\frac{x^2+2x-3}{(x^2+5x+8)^2}$$

Dunque f si annulla per $x = -1$, mentre f' si annulla per $x = -3$ e $x = 1$. Inoltre:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Si ha $f(-3) = -1$ e $f(1) = \frac{1}{7}$. Tali valori sono rispettivamente di minimo e di massimo. Essendo f continua su $\mathbf{R}$, essa assume tutti i valori compresi fra -1 e $\frac{1}{7}$, per cui l'immagine viene ad essere l'intervallo $[-1, \frac{1}{7}]$.

3. Calcolare $G(\pi)$ dove $G : [-\frac{1}{2}\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ è data da

$$G(t) = \int_{-\pi/2}^{t} f(x)\ dx$$

e f è definita nell'esercizio **1**.

Per $t \in [-\frac{1}{2}\pi, 0]$ si ha:

$$G(t) = -\int_{-\pi/2}^{t} \sin x\ dx = \Big[\cos x\Big]_{-\pi/2}^{t} = \cos t$$

Per $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ si ha:

$$G(t) = G(0) + \int_0^t \sin x \; dx = 1 - \Big[\cos x\Big]_0^t = 2 - \cos t$$

Per $t \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ si ha:

$$G(t) = G(\tfrac{1}{2}\pi) + \int_{\pi/2}^{t} (x - \tfrac{1}{2}\pi) \; dx =$$

$$= 2 + \tfrac{1}{2}\Big[(x - \tfrac{1}{2}\pi)^2\Big]_{\pi/2}^{t} = 2 + \tfrac{1}{2}(t - \tfrac{1}{2}\pi)^2$$

Si deduce infine che: $G(\pi) = 2 + \pi^2/8$.

4. Mediante il metodo di eliminazione Gaussiana si risolva il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\gamma \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

dove γ è un parametro reale. Discutere la molteplicità delle soluzioni al variare di γ.

In forma triangolare il sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \gamma & 2-\gamma \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4+\gamma & -4-\gamma \end{array}\right)$$

Nel risolverlo occorre distinguere fra $\gamma \neq -4$ e $\gamma = -4$. Nel primo caso si ha un'unica soluzione $\vec{x} = (2, 1, -1)$. Nel secondo caso ci sono infinite soluzioni che si possono esprimere nel seguente modo: $\vec{x} = (6 + 4a, 1, a)$, con a parametro reale.