Compito del 25 - 6 - 2013

1. Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Risolvere il sistema lineare:

$$(B^{-1}A)\vec{x} \ = \ \vec{b} \qquad \text{dove} \ \ \vec{b} = (-1, 1)$$

Calcolare poi i determinanti di A, B e B^{-1}.

Si ha:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $\vec{x} = (1, 0)$. Senza invertire B si sarebbe potuto anche anche risolvere il sistema $A\vec{x} = B\vec{b} = (3, 2)$, che ha la medesima soluzione. Infine: det(A)=10, det(B)=2, det(B^{-1})=1/det(B)= 1/2.

2. Si calcoli il potenziale P del campo:

$$\vec{F} = \Big((x+1)e^x \sin y, \ \ xe^x \cos y\Big)$$

Si calcoli successivamente l'integrale di $\vec{F}$ lungo una curva congiungente i punti $(0, 0)$ e $(1, \pi/2)$.

A meno di costante additiva si ha: $P(x, y) = xe^x \sin y$.
Se γ è una qualsiasi curva congiungente $(0, 0)$ e $(1, \pi/2)$ si ha:

$$\int_\gamma \vec{F} \ = \ P(1, \pi/2) - P(0, 0) \ = \ e$$

3. Determinare per quale autovalore λ, la funzione $\Psi(x, t) = i \sin(x + t) - \cos(x + t)$ risulta essere autofunzione del problema:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} \ + \ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \ = \ \lambda \Psi$$

Sostituendo direttamente Ψ si ricava:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} \ + \ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \ =$$

$$= \ (-\cos(x+t) + i \sin(x+t)) + (-i \sin(x+t) + \cos(x+t)) \ = \ 0$$

per cui l'unico valore ammesso è $\lambda = 0$.

4. Nel primo quadrante del piano (x, y) si consideri lo spicchio S del cerchio di raggio 1, compreso fra l'asse delle ascisse e la retta $y = x$. Si calcoli:

$$I \;=\; \int_S x dx dy$$

In coordinate polari S è descritto da $\{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$. Osservato che $x = r\cos\theta$ e $dxdy = rdrd\theta$, si ha:

$$I \;=\; \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^1 r^2 \cos\theta dr \right) d\theta \;=\; \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \cos\theta d\theta \;=\; \frac{1}{3} \sin\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{6}$$