Compito del 26 - 1 - 2016

1. Calcolare gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificare che sono a due a due ortogonali. Selezionare fra essi quelli che hanno norma pari ad 1. Trovare il determinante di A e della sua inversa. Scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi la norma del vettore $\vec{v} = (1, 2, 3, ..., n)$, le cui componenti sono i numeri interi da 1 ad n.

Gli autovalori sono $2 - \sqrt{2}$, 2, $2 + \sqrt{2}$ e i corrispondenti autovettori hanno la forma: $a(1, -\sqrt{2}, 1)$, $b(1, 0, -1)$, $c(1, \sqrt{2}, 1)$, dove a, b e c sono arbitrari. La matrice è simmetrica per cui gli autovettori sono ortogonali fra loro a due a due. Quelli di norma 1 sono ottenuti per: $a = \pm 1/2$, $b = \pm 1/\sqrt{2}$, $c = \pm 1/2$. Il determinante di A si ricava dal prodotto degli autovalori ed è pari a 4. Ne consegue che i determinante di A^{-1} è $1/4$.
Per il calcolo della norma di $\vec{v}$ si può scrivere ad esempio:

```
somma=0;
  for k=1:n
     somma=somma+k^2;
  end
sqrt(somma)
```

2. Sia dato il campo vettoriale:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + \alpha y^2,\ y - \beta xy,\ \gamma z^2).$$

Determinare i coefficienti α, β, γ in modo che siano verificate le seguenti situazioni: $\vec{F}$ ha divergenza nulla nel punto $(0, 0, 1)$, $\vec{F}$ ha rotore identicamente nullo, $\vec{F}$ ammette potenziale P con $P(0, 0, 0) = 0$, detto potenziale soddisfa $P(1, 1, 0) = 3$.

La divergenza di $\vec{F}$ vale $2 - \beta x + 2\gamma z$, per cui essa è zero in $(0, 0, 1)$ quando $\gamma = -1$. Il rotore di $\vec{F}$ è $(0, 0, -\beta y - 2\alpha y)$. Esso è dunque zero quando $\alpha = -\beta/2$. Sotto queste ipotesi si ricava $P(x, y, z) =$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \alpha xy^2 - \frac{1}{3}z^3$. Infine, si ha $P(1,1,0) = 3$ quando $\alpha = 2$. Pertanto: $\vec{F}(x,y,z) = (x + 2y^2,\ y + 4xy,\ -z^2)$.

3. Calcolare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) + 1 - 2t \\ \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) - 2t \end{cases}$$

con $y(0) = 0$ e $z(0) = 2$.

Si risolve la prima equazione non omogenea ricavando, tramite la condizione $y(0) = 0$: $y(t) = t$. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene l'equazione omogenea: $z'(t) = z(t)$. Quest'ultima ha per soluzione: $z(t) = 2e^t$.

4. Calcolare l'integrale $I = \int_D f dxdy$, dove $f(x,y) = x^2 + y^2$ ed il dominio D, rappresentato in coordinate polari, è dato da:

$$\tilde{D} = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \theta\}$$

Disegnare D nel piano (x,y) e $\tilde{D}$ nel piano (ρ,θ).

Si ha $f(x,y) = \rho^2$, per cui:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \theta^4 d\theta = \frac{1}{20}(2\pi)^5 = \frac{8}{5}\pi^5$$

La frontiera del dominio D è costituita dalla spirale $(\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e dal segmento $(t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Il dominio $\tilde{D}$ è un triangolo.