Compito del 26 - 1 - 2022

1. Determinare gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esprimere il vettore $(5, 4, 2)$ tramite combinazione lineare di essi.

Gli autovalori e i rispettivi autovettori sono:

$$\lambda = 3 \quad a(2,1,0), \qquad \lambda = -3 \quad b(1,-1,0), \qquad \lambda = 2 \quad c(0,0,1)$$

con a, b, c numeri reali arbitrari.
Pertanto, occorre risolvere il sistema:

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

che fornisce la soluzione $(a, b, c) = (3, -1, 2)$.

2. Dato il parametro $a \geq 1$, si consideri la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = (t, t^a) \qquad t \in [0, 1]$$

Si calcoli il lavoro $\mathcal{L}$ lungo $\vec{\gamma}$ relativamente al campo:

$$\vec{F}(x, y) = \big(y, \ x^2\big)$$

Il campo non ammette potenziale. Si ha $\vec{\gamma}'(t) = (1, at^{a-1})$, per cui:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 (t^a + t^2 a t^{a-1}) dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1} + a\frac{t^{a+2}}{a+2}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+2}$$

3. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{2t}{\cos(1 + y(t))}$$

soggetta alla condizione $y(0) = -1$. Calcolare $y(1)$.

L'equazione è a variabili separabili. Integrando e imponendo la condizione iniziale, si ricava:

$$\sin(1 + y(t)) = t^2$$

da cui: $y(t) = -1 + \arcsin(t^2)$. Si ha infine: $y(1) = -1 + \pi/2$.

4. Sia $D = \Big\{0 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le 9\Big\}$. Calcolare: $I = \int_D f(x,y)\ dxdy$, dove:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)^2}$$

In coordinate polari il dominio si esprime nel seguente modo:

$$\Big\{\rho \le 3, \quad 0 \le \theta \le \pi/4\Big\}$$

Dunque:

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^3 \rho^3 e^{\rho^4}\ d\rho\right) d\theta = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^3 \rho^3 e^{\rho^4}\ d\rho =$$

$$= \tfrac{1}{16}\pi \Big[e^{\rho^4}\Big]_0^3 = \tfrac{1}{16}\pi(e^{81} - 1)$$