Compito del 27 - 1 - 2015

1. Fattorizzare la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nella forma LU. Usare quest'ultima per risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = (1, 2, 2, -2)$.

Si ricava:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

La soluzione di $L\vec{y} = \vec{b}$ fornisce $\vec{y} = (1, 0, -1, 0)$. Infine, la soluzione di $U\vec{x} = \vec{y}$ fornisce $\vec{x} = (1, 0, -1, 0)$.

2. Si disegni il supporto della curva:

$$\vec{\gamma}(t) = \left(\frac{\cos t}{\pi + t}, \frac{\sin t}{\pi + t}\right) \qquad t \in [0, 4\pi]$$

Si calcoli poi l'integrale lungo $\vec{\gamma}$ del campo: $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$.

Il supporto della curva viene ad essere una spirale percorsa in senso antiorario con raggio che decresce da $1/\pi$ a $1/5\pi$. Per quanto riguarda il lavoro si ricava:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} = \int_0^{4\pi} \frac{dt}{(\pi + t)^2} = \frac{4}{5\pi}.$$

3. Calcolare $\lim_{t \to +\infty} y(t)$, dove y soddisfa il problema differenziale:

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4.$$

La soluzione generale dell'equazione del secondo ordine ha la forma: $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$. Dopo aver imposto le condizioni iniziali rimane: $y(t) = 2e^{-2t}$, per cui $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

4. Dato il dominio $D = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq (x-1)^2\}$, calcolare:

$$I = \int_D (1-x)dxdy.$$

Dato $\delta > 0$ abbastanza piccolo, eliminare da D i punti tale per cui: $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Ricalcolare in funzione di δ l'integrale sull'insieme rimanente.

Si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{(x-1)^2} (1-x)dy \right) dx = -\int_0^1 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Dopo l'eliminazione del quarto di circoletto, ragionando in coordinate polari, il nuovo integrale diviene:

$$\frac{1}{4} - \int_0^\delta \left(\int_0^{\pi/2} (1-\rho\cos\theta)d\theta \right) \rho d\rho = \frac{1}{4} - \int_0^\delta \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{4} - \delta^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{3} \right).$$