Compito del 27 - 8 - 2013

1. Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare il suo determinante, la sua inversa e il determinante dell'inversa. Scomporre infine A nel prodotto LU.

Determinante: -2

Inversa: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

Determinante dell'inversa: $-\frac{1}{2}$

Fattorizzazione: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

2. Si disegni la curva $\gamma(t) = ((t+1)\cos t,\ (t+1)\sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$. Si determini l'integrale lungo γ del campo $\vec{F}(x, y) = (x, y)$.

La curva è una spirale a passo costante che congiunge i punti $(1, 0)$ e $(4\pi+1, 0)$ con due giri in senso antiorario. Dato che un potenziale del campo è $P(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, basta calcolare la differenza:

$$P(4\pi + 1, 0) - P(1, 0) \ = \ 8\pi^2 + 4\pi$$

.

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ \\ z'(t) = 5z(t) \end{cases}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = -3, z(0) = 5$.

Il sistema è *disaccoppiato*. La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = 2$ con autovettori del tipo $(a, 0)$ e $\lambda_2 = 5$ con autovettori del tipo $(0, b)$.

Soluzione generale:

$y(t) = ae^{2t} \qquad z(t) = be^{5t}$

Soluzione soddisfacente le condizioni iniziali:

$y(t) = -3e^{2t} \qquad z(t) = 5e^{5t}$

4. Calcolare il volume V del solido:

$$S = \{0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ 0 \leq z \leq 2\}$$

S è un quarto di cilindro. Il raggio di base è 2, come pure l'altezza. Il volume, pari ad $\frac{1}{4}$ area di base per altezza, misura: 2π.
Tramite integrazione si ha:

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx \right) dz \ = \ 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx \ = \ 2\pi$$