Compito del 28 - 1 - 2014

1. Data la reazione:

$$\alpha Mg(OH)_2 + \beta(NH_4)_2SO_4 \to \gamma H_2O + \delta MgSO_4 + \epsilon NH_3$$

scrivere il corrispondente sistema lineare 5×5 (omogeneo) nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Posto $\epsilon = 2$, ed eliminata un'equazione, scrivere il sistema lineare 4×4 (non omogeneo) nelle rimanenti incognite. Risolvere quest'ultimo.

Devono valere le relazioni:

$$Mg: \ \alpha - \delta = 0 \quad O: \ 2\alpha + 4\beta - \gamma - 4\delta = 0 \quad H: \ 2\alpha + 8\beta - 2\gamma - 3\epsilon = 0$$

$$N: \ 2\beta - \epsilon = 0 \quad S: \ \beta - \delta = 0$$

Questo conduce al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\epsilon = 2$ le equazioni diventano:

$$Mg: \ \alpha - \delta = 0 \quad O: \ 2\alpha + 4\beta - \gamma - 4\delta = 0 \quad H: \ 2\alpha + 8\beta - 2\gamma = 6$$

$$N: \ 2\beta = 2 \quad S: \ \beta - \delta = 0$$

che, eliminata l'equazione relativa all'ossigeno, portano al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è: $(1, 1, 2, 1)$. Dunque:

$$Mg(OH)_2 + (NH_4)_2SO_4 \to 2H_2O + MgSO_4 + 2NH_3$$

2. Calcolare la lunghezza della curva γ composta dai seguenti due pezzi:

$$\gamma_1(t) \ = \ (\cos t, \ \sin t, \ 2t) \qquad t \in [0, 4\pi]$$

$$\gamma_2(t) \; = \; (1,\; 0,\; 12\pi - t) \qquad t \in [4\pi, 12\pi]$$

Calcolare successivamente: $\int_\gamma \vec{F}$ dove $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, 0)$.

La curva è chiusa (ma non semplice). La sua lunghezza L è:

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 4}\; dt \; +$$

$$+ \int_{4\pi}^{12\pi} dt \;=\; 4\pi\sqrt{5} + 8\pi \;=\; 4\pi(\sqrt{5} + 2)$$

Il campo è conservativo con potenziale: $\frac{1}{4}(x^4 + y^4)$. Siccome la curva è chiusa, si ricava: $\int_\gamma \vec{F} \; = 0$.

3. Sia data la funzione $\Psi(x,t) = \sin(x + \omega t) + i\cos(x + \omega t)$, dove i è l'unità immaginaria. Stabilire per quali autovalori λ si ha:

$$-i\frac{\partial \Psi}{\partial t} \; + \; \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \; = \; \lambda \Psi$$

cioè Ψ risulta essere un'autofunzione.

Tramite derivazione diretta si deve avere:

$$-i\omega\cos(x + \omega t) - \omega\sin(x + \omega t) - \sin(x + \omega t) - i\cos(x + \omega t) \; =$$

$$= \; \lambda\sin(x + \omega t) + i\lambda\cos(x + \omega t)$$

che è realizzata solo quando $\lambda \; = \; -\,(1 + \omega)$.

4. Calcolare l'integrale I della funzione $f(x,y) \; = \; y$ definita sul pezzo di corona circolare C espresso in coordinate polari da:

$$C = \left\{ 2 \le r \le 5, \;\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

Dato che $y = r\sin\theta$, si ha:

$$I \; = \; \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sin\theta \; dr d\theta \; = \; \tfrac{1}{3}(r_2^3 - r_1^3)(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

dove $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Per cui: $I = \frac{39\sqrt{2}}{2}$.