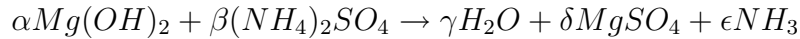


Compito del 28 - 1 - 2014

1. Data la reazione:



scrivere il corrispondente sistema lineare 5×5 (omogeneo) nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Posto $\epsilon = 2$, ed eliminata un'equazione, scrivere il sistema lineare 4×4 (non omogeneo) nelle rimanenti incognite. Risolvere quest'ultimo.

Devono valere le relazioni:

$$Mg : \alpha - \delta = 0 \quad O : 2\alpha + 4\beta - \gamma - 4\delta = 0 \quad H : 2\alpha + 8\beta - 2\gamma - 3\epsilon = 0$$

$$N : 2\beta - \epsilon = 0 \quad S : \beta - \delta = 0$$

Questo conduce al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\epsilon = 2$ le equazioni diventano:

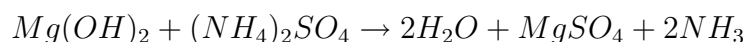
$$Mg : \alpha - \delta = 0 \quad O : 2\alpha + 4\beta - \gamma - 4\delta = 0 \quad H : 2\alpha + 8\beta - 2\gamma = 6$$

$$N : 2\beta = 2 \quad S : \beta - \delta = 0$$

che, eliminata l'equazione relativa all'ossigeno, portano al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è: $(1, 1, 2, 1)$. Dunque:



2. Calcolare la lunghezza della curva γ composta dai seguenti due pezzi:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 2t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

$$\gamma_2(t) = (1, 0, 12\pi - t) \quad t \in [4\pi, 12\pi]$$

Calcolare successivamente: $\int_{\gamma} \vec{F}$ dove $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, 0)$.

La curva è chiusa (ma non semplice). La sua lunghezza L è:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 4} dt + \\ &+ \int_{4\pi}^{12\pi} dt = 4\pi\sqrt{5} + 8\pi = 4\pi(\sqrt{5} + 2) \end{aligned}$$

Il campo è conservativo con potenziale: $\frac{1}{4}(x^4 + y^4)$. Siccome la curva è chiusa, si ricava: $\int_{\gamma} \vec{F} = 0$.

3. Sia data la funzione $\Psi(x, t) = \sin(x + \omega t) + i \cos(x + \omega t)$, dove i è l'unità immaginaria. Stabilire per quali autovalori λ si ha:

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \lambda \Psi$$

cioè Ψ risulta essere un'autofunzione.

Tramite derivazione diretta si deve avere:

$$\begin{aligned} -i\omega \cos(x + \omega t) - \omega \sin(x + \omega t) - \sin(x + \omega t) - i \cos(x + \omega t) &= \\ = \lambda \sin(x + \omega t) + i\lambda \cos(x + \omega t) \end{aligned}$$

che è realizzata solo quando $\lambda = -(1 + \omega)$.

4. Calcolare l'integrale I della funzione $f(x, y) = y$ definita sul pezzo di corona circolare C espresso in coordinate polari da:

$$C = \left\{ 2 \leq r \leq 5, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Dato che $y = r \sin \theta$, si ha:

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{1}{3}(r_2^3 - r_1^3)(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

dove $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Per cui: $I = \frac{39\sqrt{2}}{2}$.