Compito del 29 - 1 - 2013

1. Nella seguente reazione, si determinino i coefficienti α, β, γ, δ:

$$\alpha C_2H_6 + \beta O_2 \to \gamma CO_2 + \delta H_2O$$

Devono valere le relazioni: $2\alpha = \gamma$, $6\alpha = 2\delta$, $2\beta = 2\gamma + \delta$

Dando per noto α, si ha il sistema: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}$

che ha soluzioni: $\beta = \frac{7}{2}\alpha$, $\gamma = 2\alpha$, $\delta = 3\alpha$. In particolare, per $\alpha = 2$:

$$2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_2O$$

2. Sia data la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove: $\gamma_1(t) = (2t, 0)$ per $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = (4-2t, 2t-2)$ per $t \in [1,2]$, $\gamma_3(t) = (0, 6-2t)$ per $t \in [2,3]$. Si disegni γ e si calcoli l'integrale di $\vec{F} = (F_1, F_2) = (y-1, 1-x)$ lungo γ.

Il sostegno di γ (curva semplice e chiusa) è un triangolo.

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^1 (-2)dt + \int_1^2 [-2(2t-3) + 2(2t-3)]dt + \int_2^3 (-2)dt = -4$$

3. Calcolare il limite di $y(t)$ per $t \to +\infty$, dove y è soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -z(t) \\ \\ z'(t) = -4y(t) \end{cases}$$

con le condizioni $y(0) = 1, z(0) = 2$.

Derivando la prima equazione si ottiene: $y''(t) = 4y(t)$, da cui $y(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$. Inoltre: $z(t) = -y'(t) = -2ae^{2t} + 2be^{-2t}$. Imponendo le condizioni iniziali si ha: $y(t) = e^{-2t}$, cioè $a = 0$ e $b = 1$. Quindi:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

4. Si calcoli il volume del solido:

$$S = \{0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq \cos x\}$$

$$\int_S dxdydz = \int_0^1 \left(\int_1^2 \cos x \; dy \right) dx = \int_0^1 \cos x \; dx = \sin 1$$