Compito del 29 - 1 - 2018

1. Al variare del parametro α, si studino le soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi il prodotto dei numeri pari da 26 a 84 (estremi inclusi).

Il determinante della matrice si annulla per $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$. Quando il parametro risulta diverso da questi valori si ha come unica soluzione: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$. Se $\alpha = 0$ esistono infinite soluzioni con $x_2 = 0$ e $x_1 + x_3 = 0$. Se $\alpha = -1$ esistono infinite soluzioni con $x_1 = -1$ e $2x_2 + x_3 = 1$.

Per il calcolo del prodotto si può scrivere ad esempio:

```
prod=26;
  for k=14:42
     prod=prod*2*k;
  end
prod
```

2. Si considerino le due curve distinte congiungenti i punti $A = (0,0)$ e $B = (\pi, 0)$:

$$\vec{\gamma}_1(t) = (t, 0) \qquad t \in [0, \pi]$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = (t, \sin t) \qquad t \in [0, \pi]$$

Si calcoli il lavoro lungo entrambe di esse, quando: $\vec{F}(x,y) = (e^x, x+y)$.

Nel primo caso si ha:

$$\int_0^\pi [e^t + 0]dt = e^\pi - 1.$$

Nel secondo caso si ha:

$$\int_0^\pi [e^t + t\cos t + \sin t \cos t]dt = e^\pi - 3.$$

3. Mostrare che le soluzioni (non banali) dell'equazione differenziale:

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$$

tendono a zero oscillando per $t \to +\infty$.

Il polinomio caratteristico è: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, il quale ha radici $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. La soluzione generale ha pertanto la forma:

$$y(t) = e^{-t/2}\Big(\alpha \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + \beta \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t)\Big)$$

con α e β a piacere. Si evince facilmente che il comportamento di y è quello predetto.

4. Sia D la regione del primo quadrante ottenuta togliendo il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ dal quarto di cerchio con raggio pari a 2. Calcolare:

$$\int_D f(x,y)dxdy \qquad \text{dove} \quad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

L'integrale su tutto il quarto di cerchio vale (usando le coordinate polari):

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho\right) d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi.$$

Sul triangolo si ha invece:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \tfrac{1}{3}(1-x)^3\right) dx = \tfrac{1}{6}.$$

Quindi l'integrale su D vale $2\pi - \frac{1}{6}$.