Compito del 29 - 1 - 2019

1. Calcolare autovalori ed autovettori della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

nei tre seguenti casi: $\alpha = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha = -\frac{10}{3}$.

Per $\alpha = 1$ si hanno autovalori reali e distinti: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. I corrispettivi autovettori sono: $a(1, -1)$, $b(1, 3)$, con a e b numeri reali arbitrari.

Per $\alpha = -\frac{1}{3}$ si ha un solo autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità 2. I corrispettivi autovettori sono: $a(1, -3)$, con a numero reale arbitrario.

Per $\alpha = -\frac{10}{3}$ si hanno gli autovalori complessi e coniugati: $\lambda_1 = 2-3i$ e $\lambda_2 = 2+3i$. I corrispettivi autovettori sono: $a(10, -3+9i)$, $b(10, -3 - 9i)$, con a e b numeri complessi arbitrari.

2. Calcolare la lunghezza $\mathcal{L}_a$ della curva $\vec{\gamma}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \in [0, a]$, dove $a > 0$ è un parametro assegnato. Dato il campo $\vec{F}(x, y) = (2x, 1)$, calcolare il lavoro L_a lungo $\vec{\gamma}$. Calcolare infine i limiti di $\mathcal{L}_a$ e L_a per a tendente a $+\infty$.

Si ha:

$$\mathcal{L}_a = \int_0^a \sqrt{2}\ e^{-t}dt = \sqrt{2}(1 - e^{-a}).$$

Il campo ammette potenziale $P(x, y) = x^2 + y$, per cui:

$$L_a = P(\vec{\gamma}(a)) - P(\vec{\gamma}(0)) = (e^{-a}\cos a)^2 + (e^{-a}\sin a) - 1.$$

Dunque:

$$\lim_{a\to+\infty} \mathcal{L}_a = \sqrt{2} \qquad\qquad \lim_{a\to+\infty} L_a = -1.$$

3. Per $t \geq 0$, studiare il grafico di y, soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)}}{y^2(t)}$$

con la condizione $y(0) = 1$.

Si ha che $y(0) = 1$ e $y'(0) = e$ sono entrambi valori positivi. Si osserva inoltre che $y'(t)$ rimane strettamente positiva per ogni $t \geq 0$

(dunque y è sempre strettamente crescente). La derivata seconda viene ad essere:

$$y''(t) = \frac{e^{y(t)}}{y^3(t)}(y(t)-2)y'(t) = \frac{e^{2y(t)}}{y^5(t)}(y(t)-2).$$

La funzione y rimane concava fino a quando vale 2, poi diventa convessa (è facile escludere il caso in cui y si mantenga sempre al di sotto di 2). In corrispondenza all'unico t_0 per cui $y(t_0) = 2$ si ha un flesso obliquo, dato che $y'(t_0) \neq 0$. Si ha infine che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ (è facile escludere il fatto che y abbia un limite finito).

4. Assegnato l'insieme:

$$A = \left\{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\} \cup \left\{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2-x\right\}$$

si calcoli il volume del solido S ottenuto facendo ruotare A intorno all'asse x. Definita poi la funzione $f(x,y,z) = x$, dove $(x,y,z) \in S$, determinare il valore massimo di f.

Per quanto riguarda il volume si ha:

$$\mathrm{Vol}(S) = \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \frac{8}{15}\pi.$$

La f assume valore massimo quando x è la prima componente più grande possibile fra le terne di S. Questo accade quando $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$. In tal punto si ha $f(2,0,0) = 2$.