Compito del 29 - 6 - 2021

1. Data $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = x^2, \quad x \in]0, 1[; \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, +\infty[;$$

trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare l'immagine di f. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\inf(f) = 0$ e $\sup(f) = \max(f) = 1$. Il minimo non esiste. La funzione è continua su tutto il dominio. E' derivabile tranne che per $x = 1$. L'immagine di f consiste nell'insieme $B =]0, 1]$. Pur assumendo che il codominio sia B, la funzione non risulta essere invertibile, non essendo essa iniettiva.

2. Per $x \in [0, 4]$, disegnare il grafico della funzione f a valori reali, data da:

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x$$

segnalando i punti dove f assume minimo o massimo (relativo o assoluto).

Si ha:

$$f'(x) = 12(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = 12(x - 1)(x - 2)^2$$

la quale si annulla per $x = 1$ e $x = 2$ (quest'ultima radice doppia). Inoltre:

$$f''(x) = 12(3x^2 - 10x + 8) = 12(x - 2)(3x - 4)$$

da cui $f''(1) = 12$ e $f''(4/3) = f''(2) = 0$. Si ha poi che: $f(0) = 0$, $f(1) = -17$, $f(2) = -16$, $f(4) = 64$. Mettendo assieme queste informazioni si deduce che, in corrispondenza del punto $x = 0$, f ha un massimo relativo; per $x = 1$ si ha un minimo assoluto; per $x = 4/3$ si ha un flesso obliquo; per $x = 2$ si ha un flesso orizzontale; per $x = 4$ si ha un massimo assoluto.

3. Calcolare $G(3)$ dove G è data da

$$G(t) = \int_0^t x f(x)\ dx \qquad\qquad t \in [0, 3]$$

e f è definita nell'esercizio **1**.

Per $0 \leq t \leq 1$, si ha:

$$G(t) = \int_0^t x^3 \, dx = \frac{t^4}{4}$$

In particolare: $G(1) = 1/4$. Per $1 \leq t \leq 3$, si ha invece:

$$G(t) = G(1) + \int_1^t dx = 1/4 + t - 1$$

Dunque: $G(3) = 9/4$.

4. Mediante il metodo di eliminazione gaussiana, calcolare la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + iy = 3 \\ -ix + z = -2i \\ y - z = i \end{cases}$$

dove i rappresenta l'unità immaginaria.

In forma matriciale il sistema si riscrive come:

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 0 & | & 3 \\ & & & | & \\ -i & 0 & 1 & | & -2i \\ & & & | & \\ 0 & 1 & -1 & | & i \end{pmatrix}$$

Esso si trasforma in forma triangolare nella seguente maniera:

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 0 & | & 3 \\ & & & | & \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & | & -i \\ & & & | & \\ 0 & 0 & 2 & | & -2i \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema è dunque: $(x, y, z) = (1, 0, -i)$.