**Compito del 3 - 2 - 2021**

**1.** Assegnato il parametro $\alpha \geq 0$, dire in quali casi la seguente matrice amette autovettori ortogonali fra loro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

---

Se $\alpha = 2$ la matrice risulta simmetrica, per cui gli autovettori sono automaticamente ortogonali. Per vedere se ci sono altri casi, si osserva dapprima che $\lambda = 3$ è un autovalore corrispondente alla famiglia di autovettori $a(0,1,0)$, con $a$ reale. Tali vettori sono ortogonali al piano $(x,z)$ dove si trovano i rimanenti autovettori.
Il polinomiao caratteristico risulta essere: $(3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - \alpha)$. Tolto il caso già discusso, gli altri due autovalori sono: $\lambda = 2 + \sqrt{\alpha}$ con autovettori $b(1-\sqrt{\alpha}, 0, 1)$, $b$ reale; $\lambda = 2 - \sqrt{\alpha}$ con autovettori $c(1+\sqrt{\alpha}, 0, 1)$, $c$ reale. Affinché ci sia ortogonalità si deve avere forzatamente: $(1-\sqrt{\alpha})(1+\sqrt{\alpha}) + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$.

**2.** Sia data la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = \Big(t^2 e^{\sin(t^2+1)\pi},\ \ln(t^2+1)\Big) \quad t \in [0,1]$$

immersa nel campo $\vec{F}(x,y) = (2x + \sin y,\ x\cos y)$. Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ corrispondente.

---

Il campo ammette potenziale $P(x,y) = x^2 + x\sin y$, per cui:

$$\mathcal{L} = P\Big(x(1), y(1)\Big) - P\Big(x(0), y(0)\Big) =$$
$$= P(1, \ln 2) - P(0,0) = 1 + \sin(\ln 2).$$

**3.** Siano $y$ e $z$ le generiche soluzioni del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) - z(t) \\ \\ z'(t) = 3y(t) - 6z(t) \end{cases}$$

Calcolare: $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, $\lim_{t\to+\infty} z(t)$.

---

Gli autovalori della corrispondente matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

valgono $-3$ e $-5$. Le soluzioni sono dunque combinazioni lineari degli esponenziali $e^{-3t}$ e $e^{-5t}$. Se ne deduce che i limiti di $y(t)$ e $z(t)$, per $t \to +\infty$, sono entrambi nulli.

**4.** Sia $D$ l'insieme ottenuto unendo il cerchio di centro l'origine e raggio 1 e il quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Calcolare:

$$I = \int_D (x^2 + y^2)\ dxdy$$

---

Per quanto riguarda la parte relativa al quadrato si ha:

$$I_1 = \int_0^1 \left( \int_0^1 (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left( \tfrac{1}{3} + y^2 \right) dy = \tfrac{2}{3}$$

Per quanto riguarda invece i tre quarti di cerchio si ha (lavorando in coordinate polari):

$$I_2 = \int_0^1 \left( \int_{\pi/2}^{2\pi} \rho^3 d\theta \right) d\rho = \tfrac{3}{2}\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \tfrac{3}{8}\pi$$

Dunque: $I = \frac{2}{3} + \frac{3}{8}\pi$.