Compito del 3 - 3 - 2020

1. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e del suo quadrato A^2.

Per l'autovalore $\lambda = 1 + i$ si hanno gli autovettori $a(1, 0, -i)$, per l'autovalore $\lambda = 3$ si hanno gli autovettori $b(0, 1, 0)$, per l'autovalore $\lambda = 1 - i$ si hanno gli autovettori $c(1, 0, i)$, con a, b, c numeri reali. Gli autovettori di A^2 sono gli stessi di A e gli autovalori si ottengono elevando quelli di A al quadrato, ottenendo la terna: $2i, 9, -2i$.

2. Sia data la funzione crescente $g(t)$, $t \in [0, 1]$, con $g(0) = 1$ e $g(1) = \beta$, con $\beta > 1$. Si consideri la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = \Big(g(t)\cos(2\pi t),\ g(t)\sin(2\pi t)\Big) \qquad t \in [0, 1]$$

Si calcoli il lavoro $\mathcal{L}$ nel caso in cui campo abbia l'espressione:

$$\vec{F}(x, y) = \Big(2xe^y,\ x^2e^y\Big)$$

Determinare β in modo che $\mathcal{L} = 3$.

La curva congiunge il punto $(1, 0)$ con il punto $(\beta, 0)$. Il campo ammette potenziale $P(x, y) = x^2e^y$. Il lavoro si ricava dalla differenza:

$$\mathcal{L} = P(\beta, 0) - P(1, 0) = \beta^2 - 1.$$

Si ha quindi che $\mathcal{L} = 3$ quando $\beta = 2$.

3. Dato il parametro reale $\gamma \neq 1$, calcolare le soluzioni del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + z(t) \\ \\ z'(t) = \gamma z(t) \end{cases}$$

con $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$.

Dalla seconda equazione si ottiene immediatamente: $z(t) = e^{\gamma t}$. La prima equazione, nel caso omogeneo, ha come soluzioni: $y(t) = \alpha e^t$, con α da determinarsi. Aggiungendo z, una soluzione particolare è data da $e^{\gamma t}/(\gamma - 1)$. La soluzione cercata è dunque:

$$y(t) = \alpha e^t + \frac{e^{\gamma t}}{\gamma - 1} = \frac{e^{\gamma t} - e^t}{\gamma - 1}$$

dove α è stato calcolato in modo da rispettare la condizione iniziale $y(0) = 0$.

4. Sia data la funzione: $f(x, y) = 1 - \cos(x^2 + y^2)$, definita su $D = \{x^2 + y^2 \leq 4,\ y > 0\}$. Si calcoli $\int_D f(x, y) dxdy$ e si trovino i punti di D in cui si annulla il gradiente $\vec{\nabla} f$.

In coordinate polari il dominio di definizione diventa: $\tilde{D} = \{0 < \rho \leq 2,\ 0 < \theta < \pi\}$, per cui:

$$\int_D f(x, y) dxdy = \int_{\tilde{D}} (1 - \cos \rho^2)\rho \ d\rho d\theta = \pi \int_0^2 (1 - \cos \rho^2)\rho \ d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\rho^2 - \sin \rho^2\Big]_0^2 = \frac{\pi}{2}(4 - \sin 4).$$

Per quanto riguarda il gradiente, si ha:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \Big(2x \sin(x^2 + y^2),\ 2y \sin(x^2 + y^2)\Big)$$

Questo si annulla quando $x^2 + y^2 = \pi < 4$ (si noti che il punto $x = y = 0$ non è contenuto in D). Quindi $\vec{\nabla} f = 0$ in tutti i punti della semicirconferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\pi}$, con $y > 0$.