**Compito del 30 - 6 - 2015**

**1.** Calcolare autovalori ed autovettori della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se gli autovettori sono ortogonali fra loro.

---

Per l'autovalore $\lambda = 1 + i$ si hanno gli autovettori $v_1 = a(1, 0, -i)$, per l'autovalore $\lambda = 2$ si hanno gli autovettori $v_2 = b(0, 1, 0)$, per l'autovalore $\lambda = 1 - i$ si hanno gli autovettori $v_3 = c(1, 0, i)$, con $a$, $b$, $c$ numeri arbitrari non nulli.
I vettori $v_1$ e $v_2$, come pure i vettori $v_2$ e $v_3$, sono ortogonali fra loro.
I vettori $v_1$ e $v_3$ hanno invece prodotto scalare diverso da zero.

**2.** Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A = (t,\ 2 - t^2) \qquad t \in [0, 1], \qquad \vec{\gamma}_B = (t,\ (t - 2)^2) \qquad t \in [1, 2].$$

Si calcoli l'integrale $L$ lungo $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo:

$$\vec{F}(x, y) = (y, 0).$$

---

Il campo non ammette potenziale. Il lavoro risulta essere:

$$L = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} = \int_0^1 (2 - t^2)dt + \int_1^2 (t - 2)^2 dt = 2.$$

**3.** Calcolare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + z(t) \\ \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$$

con $y(0) = 3$ e $z(0) = 0$.

---

Dalla seconda equazione si ricava $z(t) = \alpha e^{2t}$, che con il dato iniziale $z(0) = 0$ fornisce $z(t) = 0, \forall t$. La prima equazione diventa dunque: $y'(t) = y(t)$. Pertanto si ricava infine: $y(t) = 3e^t$.

**4.** Assegnata la funzione $g$, data da:

$$g(x) = 2 - x^2 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g(x) = (x - 2)^2 \quad 1 < x \leq 2,$$

si consideri l'insieme $D = \{0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$, e si calcoli l'integrale:

$$I = \int_D x dx dy.$$

---

Si ha:

$$I = \int_0^2 \left( x \int_0^{g(x)} dy \right) dx = \int_0^1 x(2 - x^2) dx + \int_1^2 x(x-2)^2 dx = \frac{7}{6}.$$