Compito del 4 - 2 - 2020

1. Dato il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 6-5\alpha \\ 3\alpha - 1 \end{pmatrix}$$

determinare $\alpha > 0$ in modo che (x_1, x_2, x_3) sia ortogonale al vettore $(6, 0, -1)$.

Risolvendo il sistema si ottiene $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2\alpha, 3\alpha)$. Questo vettore è ortogonale a $(6, 0, -1)$ quando $\alpha = 2$.

2. Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A(t) = \Big(t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t),\ t\Big) \qquad t \in [0,1]$$

$$\vec{\gamma}_B(t) = (2-t,\ 0,\ 2-t) \qquad t \in [1,2]$$

Si calcoli l'integrale lungo $\vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(3x^2y + z^2,\ x^3,\ 2xz\Big)$$

Il campo ammette potenziale $P(x,y,z) = x^3y + xz^2$. Dato che $\vec{\gamma}_A(0) = \vec{\gamma}_B(2) = (0,0,0)$, la curva è chiusa, per cui il lavoro risulta essere nullo.

3. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = y(t) - y^2(t)$$

in modo che $y(0) = \frac{1}{2}$.

L'equazione è a variabili separabili. Dunque:

$$\int \frac{y'(t)dt}{y(t)(1-y(t))} = \int 1\ dt = t + c$$

con c costante. Posto $z = y(t)$, si ha:

$$\int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz = \ln\left|\frac{z}{1-z}\right|$$

Pertanto si ottiene:

$$\frac{y(t)}{1-y(t)} = \pm e^{t+c} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{\pm e^{t+c}}{1 \pm e^{t+c}}$$

Imponendo $y(0) = \frac{1}{2}$ si ricava infine $c = 0$ e $y(t) = e^t/(1 + e^t)$.

4. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione:

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x - 8y$$

definita sul quadrato $Q = [0, 2] \times [0, 2]$.

I gradiente di f è: $(2x - 1, 8y - 8)$, il quale si annulla nel punto $(\frac{1}{2}, 1) \in Q$. In tal punto l'Hessiana di f è definita positiva, per cui $f(\frac{1}{2}, 1) = -17/4$ è un minimo locale. Lungo il lato $y = 0$, la funzione $x^2 - x$ ammette minimo per $x = \frac{1}{2}$, da cui $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$. Lungo il lato $x = 0$, la funzione $4y^2 - 8y$ ammette minimo per $y = 1$, da cui $f(0, 1) = -4$. Lungo il lato $y = 2$ il minimo è dato da $f(\frac{1}{2}, 2) = -\frac{1}{4}$. Lungo il lato $x = 2$ il minimo è dato da $f(2, 1) = -2$. Altri valori interessanti sono: $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 0$, $f(2, 0) = 2$, $f(2, 2) = 2$. Mettendo insieme le informazioni si ricava che il minimo assoluto di f è $-17/4$, mentre il massimo è 2.