Compito del 4 - 3 - 2020

1. Sia definita $f : A = [0, 6[\to B$ in modo che:

$$f(x) = \sin x \quad \text{se } x \neq 5; \qquad f(5) = 2.$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\sup(f) = \max(f) = 2$, $\inf(f) = \min(f) = -1$. La funzione è continua e derivabile in A tranne che per $x = 5$. La funzione è suriettiva se $B = [-1, 1] \cup \{2\}$. La funzione non è invertibile.

2. Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x > -1 \text{ e } x \neq 0\}$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, tale per cui:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

Determinare l'immagine di f.

Si ha:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

La funzione è continua e derivabile infinite volte. Si ricava:

$$f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)} \qquad f''(x) = -\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2(x+1)^2}$$

Non vi sono punti di annullamento per la derivata prima. La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]-1, 0[$, annullandosi una sola volta. Nello stesso intervallo è dapprima convessa e poi concava presentando un punto di flesso per $x = \sqrt{2} - 2$. Sulla semiretta $]0, +\infty[$ la funzione è strettamente crescente, strettamente concava e si annulla in un solo punto.
L'immagine di f coincide con tutto $\mathbf{R}$.

3. Dato l'intero $n \geq 1$, rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G(t) = \int_0^t f\left(\tfrac{x}{n}\right) dx \qquad t \in [0, 6]$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Posto $a_n = G(6)$, calcolare il limite di detta successione per $n \to +\infty$.

La discontinuità della funzione f non rappresenta problemi per la sua integrazione. In pratica, si ha:

$$G(t) = \int_0^t \sin\left(\tfrac{x}{n}\right)\, dx = \left[-n\cos\left(\tfrac{x}{n}\right)\right]_0^t = -n\cos\left(\tfrac{t}{n}\right) + n$$

Pertanto si ricava:

$$a_n = n\left(1 - \cos\left(\tfrac{6}{n}\right)\right) = \frac{36}{n}\,\frac{1-\cos\left(\frac{6}{n}\right)}{\frac{36}{n^2}}$$

La successione a_n è il prodotto di una successione infinitesima e di una che tende a $\frac{1}{2}$. Quindi: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

4. Mediante eliminazione Gaussiana risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \\ 5-6\alpha \end{pmatrix}$$

e determinare i valori del parametro reale α in modo che la norma del vettore (x_1, x_2, x_3) sia pari a $\sqrt{6}$.

In forma triangolare il sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\alpha \\ 5 \end{pmatrix}$$

La soluzione risulta essere $(1, 2\alpha, 2)$. Si deve poi avere $1+4\alpha^2+4 = 6$, da cui $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.