Compito del 4 - 6 - 2019

1. Calcolare gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice: $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Formare poi le due matrici: $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dove (a, c) è un autovettore (a piacere) relativo a λ_1 e (b, d) è un autovettore relativo a λ_2.

Verificare le relazioni: $A = B\Lambda B^{-1}$ e $A^2 = B\Lambda^2 B^{-1}$.

Si ha $\lambda_1 = 5$ con $(a, c) = (1, -2)$ e $\lambda_2 = 10$ con $(b, d) = (2, 1)$. La prima verifica corrisponde ad una moltiplicazione esplicita di matrici. Data per provata la prima relazione, nel secondo caso si può notare che: $A^2 = (B\Lambda B^{-1})(B\Lambda B^{-1}) = B\Lambda(B^{-1}B)\Lambda B^{-1} = B\Lambda\Lambda B^{-1} = B\Lambda^2 B^{-1}$, senza bisogno di svolgere ulteriori conti.

2. Dato il campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2},\ \frac{x}{x^2 + y^2},\ 0 \right), \qquad x^2 + y^2 \neq 0,$$

calcolare il lavoro lungo la curva: $\vec{\gamma}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$, $\quad t \in [0, 6\pi]$.

Malgrado il rotore di $\vec{F}$ sia nullo, il campo non è conservativo. Per quanto riguarda il lavoro, si ha:

$$\int_0^{6\pi} \left[\frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}(\cos t) + 0 \cdot 1 \right] dt$$

$$= \int_0^{6\pi} 1 dt = 6\pi.$$

3. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = t\, y^3(t), \qquad \text{con } y(0) = 1$$

Calcolare poi il limite di $y(t)$ per t che tende a 1 (da sinistra).

Separando le variabili ed integrando, si arriva alla relazione:

$$-\frac{1}{2\, y^2(t)} = \frac{t^2}{2} + c$$

Successivamente si deduce che $c = -1/2$ e che: $y(t) = 1/\sqrt{1 - t^2}$. Pertanto: $\lim_{t \to 1^-} y(t) = +\infty$.

4. Calcolare il valore minimo e massimo della funzione $f(x, y) = y(2 - y) + \sin 2x$, definita sul rettangolo $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

Si ha che $f \geq 0$ in R, e che $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 0$. Dunque f assume zero come valore minimo. Inoltre:

$$\vec{\nabla} f = \Big(2\cos 2x, 2(1 - y)\Big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{4}\pi,\ y = 1$$

La matrice Hessiana nel punto stazionario vale:

$$H_f(\tfrac{1}{4}\pi, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $f(\frac{1}{4}\pi, 1) = 2$ è il valore massimo assunto da f (i valori sul bordo di R sono tutti inferiori).