Compito del 5 - 2 - 2020

1. Per ogni numero naturale $n \geq 1$, sia definita $f : A = [-1, 1] \to B$ in modo che:

$f(x) = -(x+1)^2$ se $x \in [-1, 0]$; $f(x) = n(1-x)$ se $x \in]0, 1[$; $f(1) = 4$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Discutere l'invertibilità al variare di n.

Si ha $\sup(f) = \max\{4, n\}$. Il massimo esiste, ed è pari a 4, solo se $n \leq 4$. Inoltre: $\inf(f) = \min(f) = -1$. La funzione è continua e derivabile in A tranne che per $x = 0$ e $x = 1$. La funzione è suriettiva se $B = [-1, n[\cup \{4\}$. In tale circostanza è invertibile solo se $n \leq 4$.

2. Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x > 1\}$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, tale per cui:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Determinare l'immagine di f.

Si ha: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La funzione è derivabile infinite volte. In particolare:

$$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}} \qquad f''(x) = \frac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$$

Da ciò si deduce che f ha valore minimo in corrispondenza del punto $x = 2$ e ha un flesso per $x = 4$. Il valore minimo assunto da f è $f(2) = 2$. Per tale motivo, dato che f è continua, la sua immagine è costituita dall'insieme: $[2, +\infty[$.

3. Per $t \in [-1, 1]$, rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$F(t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx$$

dove f (dipendente da n) è definita nell'esercizio **1**. Posto $a_n = F(1)$, calcolare il limite di detta successione per $n \to +\infty$.

Per $t \in [-1, 0]$, si ha:

$$F(t) = -\int_{-1}^{t} (x+1)^2 dx = -\frac{1}{3}(t+1)^3$$

da cui $F(0) = -1/3$. Per $t \in]0, 1]$, si ha:

$$F(t) = F(0) + n\int_0^t (1-x)dx = -\frac{1}{3} - \frac{n}{2}\left[(1-x)^2\right]_0^t = -\frac{1}{3} - \frac{n}{2}(1-t)^2 + \frac{n}{2}$$

Pertanto si ricava: $a_n = F(1) = -1/3 + n/2$. Tale successione diverge a $+\infty$.

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ -2 & i \end{pmatrix}$$

Calcolare $\vec{x}$ in modo che $A^2\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = (20 + 9i, -7 + 12i)$. Si dica infine se i vettori $\vec{x}$ e $\vec{b}$ sono ortogonali fra loro.

Si ha:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -10 & 9i \\ -6i & -7 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema viene ad essere: $\vec{x} = (-2, 1)$. Il prodotto scalare: $\vec{x} \cdot \vec{b} = -47 - 6i$ è diverso da zero; pertanto i due vettori non sono ortogonali.