Compito del 6 - 6 - 2017

1. Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\vec{x}$ in modo che $A^2\vec{x} = B\vec{b}$, con $\vec{b} = (\frac{15}{4}, -\frac{1}{2})$. Dire poi se esistono dei vettori non nulli $\vec{y}$ tali per cui $A^2\vec{y} = B\vec{y}$ (Cenno: controllare il determinante di $A^2 - B$).

Si ha:

$$A^2\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B\vec{y} = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si ricava dunque: $\vec{x} = (1, -1)$.
Dato che il determinante di $A^2 - B$ è nullo, si possono sicuramente trovare degli $\vec{y}$ non banali, ad esempio quelli della forma $a(-1, 2)$, con a arbitrario.

2. Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A = \Big((t+1)\cos\pi t,\ (t+1)\sin\pi t\Big) \qquad t \in [0, 1],$$

$$\vec{\gamma}_B = (3t - 5,\ 0) \qquad t \in [1, 2].$$

Si calcoli la sua lunghezza L e l'integrale lungo $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo:

$$\vec{F}(x, y) = (y^2\cos x,\ 2y\sin x).$$

La lunghezza di $\vec{\gamma}_B$ è pari a 3. Pertanto:

$$L = 3 + \int_0^1 \sqrt{1 + [\pi(t+1)]^2}\ dt = 3 + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sqrt{1+s^2}\ ds =$$

$$= 3 + \frac{1}{2\pi}\Big[s\sqrt{1+s^2} + \ln(s + \sqrt{1+s^2})\Big]_\pi^{2\pi} = ...$$

dove è stata fatta la sostituzione $s = \pi(t+1)$.
A meno di costante additiva il campo ammette potenziale $P(x, y) = y^2\sin x$. Il lavoro risulta essere nullo in quanto la curva è chiusa.

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}.$$

soddisfacente $y(0) = 5$ e $z(0) = 0$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = -3$ con autovettori $(2a, -a)$ e $\lambda_2 = 2$ con autovettori $(b, 2b)$, per cui la soluzione generale risulta essere:

$$y(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t} \qquad z(t) = -ae^{-3t} + 2be^{2t}$$

Imponendo le condizioni iniziali si deduce che: $a = 2$ e $b = 1$.

4. Sia D la regione del piano ottenuta togliendo dal cerchio (di raggio $\sqrt{\pi}$ e centro nell'origine) i punti (x, y) che stanno nel primo quadrante. Calcolare:

$$I = \int_D \sin(x^2 + y^2)\, dxdy$$

In coordinate polari si ha:

$$I = \int_{\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\pi}} r \sin r^2 \, dr \right) d\theta = \frac{3}{4}\pi \Big[-\cos r^2 \Big]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2}\pi.$$