Compito del 7 - 1 - 2014

1. Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare i suoi autovalori e quelli della sua inversa A^{-1}. Calcolare gli autovalori di $(A^{-1})^{-1}$ e di AA^{-1}. Esprimere infine A come prodotto LU.

Gli autovalori di A sono 2 e 4. Gli autovalori di A^{-1} sono i reciproci degli autovalori di A, quindi: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. La matrice $(A^{-1})^{-1}$ coincide con A mentre AA^{-1} è la matrice identica, per cui l'unico autovalore è 1 (con molteplicità 2). Non è necessario calcolare A^{-1}. Ad ogni modo si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione si ricava:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

2. Sia data la curva γ composta dai seguenti quattro pezzi:

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, 1] \qquad \gamma_2(t) = (1, t-1) \quad t \in [1, 2]$$

$$\gamma_3(t) = (3-t, 1) \quad t \in [2, 3] \qquad \gamma_4(t) = (0, 4-t) \quad t \in [3, 4]$$

Calcolare $\int_\gamma \vec{F}$ sia nel caso in cui $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$, sia in quello in cui $\vec{F}(x, y) = (2y, -2x)$.

La curva è semplice e chiusa e il suo sostegno è un quadrato. Nel primo caso il campo è conservativo. A meno di costante additiva il potenziale è $\frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. Quindi, essendo la curva chiusa: $\int_\gamma \vec{F} = 0$. Nel secondo caso si ha:

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^1 0\ dt + \int_1^2 (-2)dt + \int_2^3 (-2)dt + \int_3^4 0\ dt = -4$$

3. Data l'equazione differenziale:

$$y'(t) = t\ y^3(t) \qquad \text{con } y(0) = 2$$

determinare il primo istante $t_0 > 0$ tale per cui $y(t_0)$ cessa di esistere.

Separando le variabili ed integrando rispetto a t si ricava:

$$-\frac{1}{2y^2(t)} = \frac{t^2}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \pm\sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}$$

dove la costante c è da determinare. Si ha $y(0) = 2$ quando $c = -\frac{1}{8}$, per cui:

$$y(t) = \sqrt{\frac{-1}{t^2 - \frac{1}{4}}}$$

Per $t_0 = \frac{1}{2}$ la soluzione perde di significato.

4. Data la regione del piano definita da:

$$D = D_1 \cup D_2 = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\} \cup \{1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x\}$$

calcolare l'integrale I della funzione $f(x, y) = y$.

Si ha:

$$\int_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} ydy \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{10}$$

$$\int_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} ydy \right) dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2-x)^2 dx = \frac{1}{6}$$

da cui $I = \frac{4}{15}$.