Compito del 7 - 1 - 2015

1. Siano dati la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore $\vec{b} = (-2, 0, 4)$. Si risolva il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$. Si determinino gli autovalori di A, A^2 ed A^4.

Si ottiene: $\vec{x} = (-1, 2, 0)$. Gli autovalori di A sono: $2, 2i, -2i$. Gli autovalori di A^2 sono: $4, -4$ (quest'ultimo con molteplicità doppia). Infine, l'unico autovalore di A^4 è 16, con molteplicità tripla.

2. Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A = (\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\sin t) \qquad t \in [0, \tfrac{5}{4}\pi]$$

$$\vec{\gamma}_B = \Big(\frac{4t}{5\pi} - 2,\ \frac{4t}{5\pi} - 2\Big) \qquad t \in [\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{5}{2}\pi]$$

Se ne calcoli la lunghezza. Si calcoli poi l'integrale lungo $\vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo:

$$\vec{F}(x, y) = \Big(\frac{e^{2y}}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}xe^{2y}\Big).$$

La lunghezza risulta essere pari a $\sqrt{2}(\frac{5}{4}\pi + 1)$. Il campo ammette potenziale $P(x, y) = xe^{2y}/\sqrt{2}$. Dunque il lavoro risulta uguale alla differenza: $P(0, 0) - P(\sqrt{2}, 0) = -1$.

3. Trovare la soluzione generale del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -2y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

Posto poi $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$, trovare $z(0)$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = 2$ con autovettori $(a, 2a)$ e $\lambda_2 = 7$ con autovettori $(b, -b/2)$. La soluzione generale è quindi:

$y(t) = ae^{2t} + be^{7t} \qquad z(t) = 2ae^{2t} - \frac{1}{2}be^{7t}.$

Dalle condizioni su y si deduce che $a = -1$ e $b = 1$, da cui $z(0) = -5/2$. L'ultimo risultato si poteva ricavare dalla prima equazione, senza risolvere l'intero sistema.

4. Dato il dominio $D = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq (x-1)^2\}$, calcolare:

$$I = \int_D (x+1)dxdy.$$

Successivamente, dato $\delta > 0$ abbastanza piccolo, eliminare da D i punti con $x < \delta$ e $y < \delta$. Ricalcolare in funzione di δ l'integrale sull'insieme rimanente.

Si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{(x-1)^2} (x+1)dy \right) dx = \int_0^1 (x+1)(x-1)^2 dx = \frac{5}{12}.$$

Dopo l'eliminazione del quadratino, il nuovo intergrale viene ad essere:

$$I - \int_0^\delta \left(\int_0^\delta (x+1)dy \right) dx = \frac{5}{12} - \frac{\delta^2}{2}(\delta + 2).$$