Compito del 7 - 1 - 2016

1. Dato il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 6-5\alpha \\ 3\alpha - 1 \end{pmatrix}$$

dire se esistono valori di $\alpha > 0$ per i quali la soluzione è costituita da tre numeri interi dispari.
Scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi la somma dei numeri dispari da 1 a 27 compresi.

La soluzione viene ad essere: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2\alpha, 3\alpha)$. La seconda componente x_2 è dispari solo se α è un numero intero dispari diviso per 2, ma ciò è incompatibile con il fatto che x_3 debba essere intero. Per il calcolo della somma si può scrivere ad esempio:

```
somma=0;
  for k=0:13
     somma=somma+2*k+1;
  end
somma
```

2. Sia $\vec{\gamma}$ la curva ottenuta come unione dei seguenti pezzi:

$$(1-t, t) \quad t \in [0,1] \qquad\qquad (1-t, 2-t) \quad t \in [1,2]$$

$$(t-3, 2-t) \quad t \in [2,3] \qquad\qquad (t-3, t-4) \quad t \in [3,4]$$

Calcolare la lunghezza di $\vec{\gamma}$. Calcolare il lavoro lungo $\vec{\gamma}$ nei casi in cui il campo vettoriale sia $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ oppure $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$.

La curva $\vec{\gamma}$ è chiusa e composta da 4 segmenti rettilinei, formanti un quadrato di lato $\sqrt{2}$. La lunghezza di $\vec{\gamma}$ è dunque pari a $4\sqrt{2}$. Il primo campo è conservativo per cui il lavoro risulta essere nullo. Il secondo campo non è conservativo. Il lavoro corrispondente equivale a 4.

3. Calcolare la soluzione complessa dell'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = (\sin t + i \cos t) y(t) \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

dove i è l'unità immaginaria.

Si ottiene facilmente: $y(t) = 2e^{1-\cos t + i \sin t}$.

4. Data la funzione $f(x,y) = 1/(1-x^2)$ ed il dominio:

$$D = \{0 \le x \le 1,\ x^2 - 1 \le y \le 1 - x^4\}$$

calcolare $I = \int_D f dxdy$.

Si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x^2} \int_{x^2-1}^{1-x^4} dy \right) dx = \int_0^1 (2+x^2) dx = \frac{7}{3}$$