**Compito del 7 - 1 - 2019**

**1.** Sia data la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il determinante di $A$, gli autovalori di $A^2$ e quelli di $A^{-1}$. Si risolva infine il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, dove $\vec{b} = (-1, -4, 10)$.

---

Gli autovalori di $A$ valgono 2, 4, 7. Pertanto, gli autovalori di $A^2$ sono 4, 16, 49, mentre quelli di $A^{-1}$ sono 1/2, 1/4, 1/7. Il determinante di $A$ è pari al prodotto degli autovalori, e quindi vale 56. Infine si ha che $\vec{x} = (1, -1, 2)$.

**2.** Dato il campo $\vec{F}(x, y, z) = \Big(x, y, z(x^2 + y^2)\Big)$, si calcoli il lavoro lungo la curva $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 2t),\ t \in [0, 2\pi]$.

---

Il calcolo del lavoro segue dal conto esplicito (si noti che $\vec{F}$ non è conservativo):

$$\int_0^{2\pi} \Big[\cos t(-\sin t)+\sin t\cos t+2t(\cos^2 t+\sin^2 t)2\Big]dt = \int_0^{2\pi} 4t\,dt = 8\pi^2.$$

**3.** Al variare del parametro $\omega \geq 0$, calcolare $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, dove $y$ è soluzione del problema di Cauchy:

$$y''(t) + 2y'(t) + (1 + \omega^2)y(t) = 0$$

con le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = \omega$.

---

Per $\omega > 0$, l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + (1 + \omega^2) = 0$ fornisce le due radici complesse: $\lambda = -1 \pm \omega i$. Pertanto, la soluzione risulta essere combinazione lineare dei due rami di soluzione: $y(t) = e^{-t}\sin(\omega t)$ e $y(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$. Dallo studio delle condizioni iniziali consegue che $y(t) = e^{-t}\sin(\omega t)$. In ogni caso, si ricava: $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Se $\omega = 0$, l'unica soluzione risulta essere $y(t) = 0, \forall t$, quindi il limite è ancora zero.

**4.** Data la funzione $f(x, y) = xy(2 - x)(2 - y)$, calcolare il volume del più piccolo parallelepipedo contenente l'insieme:

$$\Omega = \{0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Le derivate parziali di $f$ sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(1-x)y(2-y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(1-y)x(2-x).$$

Il gradiente si annulla dunque nei punti: $(1,1)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(2,2)$. Solo il primo di essi è interno al quadrato $Q = [0,2] \times [0,2]$. In esso la matrice Hessiana assume l'espressione:

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che siamo in presenza di un punto di massimo, dove si ha $f(1,1) = 1$. Gli altri punti stazionari sono di sella ed in essi (come in tutto il bordo di $Q$) la funzione si annulla.
Il più piccolo parallelepipedo contenente $\Omega$ è quindi: $P = \{0 \leq x \leq 2, \;\; 0 \leq y \leq 2, \;\; 0 \leq z \leq 1\}$, il cui volume vale 4.